Intégration

1. (a) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue par morceaux (et même continue) sur $]0,+\infty[$, donc son intégrale sur $[x,1]$ (lorsque $x<1$) et sur $[1,x]$ (lorsque $x \geqslant 1$) est correctement définie, puisque le segment est inclus dans $]0,+\infty[$.

   (b) Le signe de la fonction f est celui de ln.
   On a donc :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

   — si $x \geqslant 1$, on intègre une fonction positive sur $[1,x]$ donc par positivité de l'intégrale, $\mathrm{F}(x) \geqslant 0$.

   — si $x<1$, f est négative sur $[x,1]$ donc $\displaystyle\int_x^1 f$ est négative. Donc $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_1^x f$ est positive : $\mathrm{F}(x) \geqslant 0$.

   Donc,
$$\forall x>0,\ \mathrm{F}(x) \geqslant 0.$$
.

   (c) D'après le *théorème fondamental*, la fonction f étant **continue** $]0,+\infty[$, F est la primitive de f sur $]0,+\infty[$ s'annulant en 1.
   Par conséquent, F est dérivable, et sa dérivée f étant continue, on peut conclure que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
   De plus, comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ (comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas), sa primitive F est elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
   Donc,
$$\forall x>0,\quad \mathrm{F}'(x) = f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

2. Soit $x>0$. On a $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

   Effectuons le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ entre 1 et $\dfrac{1}{x}$. On a $\mathrm{d}u = -\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

   Ainsi, $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{-\ln\frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int_{\frac{1}{1}}^{x} \frac{\ln u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \mathrm{F}(x)$.

   Donc,
$$\forall x>0,\quad \mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{F}(x).$$

3. (a) On note ϕ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\phi(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$.

   On a $\phi(x) = \dfrac{\arctan x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$.

   D'où $\displaystyle\lim_{x\to 0}\phi(x) = 1$. Cette limite étant finie, la fonction ϕ est bien prolongeable par continuité en 0, et on peut poser $\tilde{\phi}(0) = 1$.

(b) Soit $x > 0$.

Les fonctions ln et arctan étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$ si $x < 1$), on peut intégrer par parties : $\mathrm{F}(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \Big[\ln(t)\arctan t\Big]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\arctan t\ \mathrm{d}t$

Donc,

$$\forall x > 0, \quad \mathrm{F}(x) = (\arctan x)\ln x - \int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) i. On a $(\arctan x)\ln x \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (croissances comparées).

Donc $\lim\limits_{x\to 0}(\arctan x)\ln x = 0$.

La fonction $x \mapsto (\arctan x)\ln x$ est prolongeable par continuité en 0 ;

ii. $\forall x > 0$, $\int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \tilde{\phi}(t)\,\mathrm{d}t$, puisque $\tilde{\phi}$ et ϕ coïncident sur l'intervalle d'intégration ($x \neq 0$).

$\tilde{\phi}$ étant continue sur $[0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \int_1^x \tilde{\phi}(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $\tilde{\phi}$ sur $[0, +\infty[$ (théorème fondamental). Elle est donc continue sur $[0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto \int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t$ coïncidant avec $x \mapsto \int_1^x \tilde{\phi}(t)\,\mathrm{d}t$ sur $]0, +\infty[$, elles ont la même limite en 0.

D'où $\lim\limits_{x\to 0}\int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^0 \tilde{\phi}(t)\,\mathrm{d}t$.

D'après la relation précédente, on peut en déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{F}(x) = 0 + \int_1^0 \tilde{\phi}(t)\,\mathrm{d}t$.

F est prolongeable par continuité en 0 et on note $\mathrm{F}(0) = \int_1^0 \tilde{\phi}(t)\,\mathrm{d}t$.

Par composition des limites, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{F}(0)$.

Or, $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0)$.

(d) — F (= son prolongement) est continue en 0 ;

— F est dérivable sur $]0, +\infty[$;

— $\forall x > 0, \quad \mathrm{F}'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, on peut en déduire que F n'est pas dérivable en 0.

Cependant, Γ admet au point d'abscisse 0 une **demi-tangente verticale.**

4. (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_k(x) &= \int_1^x t^k \ln t\ \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{k+1}}{k+1} \times \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int_1^x t^k\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}-1}{k+1}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad \mathrm{I}_k(x) = \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} + \frac{1 - x^{k+1}}{(k+1)^2}$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$.

D'après une formule très célèbre, $(1-(-x^2))\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k = 1-(-x^2)^{n+1}$.

En divisant par $1+x^2 \neq 0$: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$.

Et finalement,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

(c) On peut l'appliquer en t et multiplier par $\ln t$:

$$\frac{\ln t}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\ln t + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}\ln t}{1+t^2}.$$

On intègre entre 1 et x et on utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_1^x t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On reconnaît :

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{I}_{2k}(x) + (-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

D'où,

$$\left|\mathrm{F}(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{I}_{2k}(x)\right| = \left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|.$$

i. Si $x \geqslant 1$, d'après l'inégalité de la moyenne :

$$\left|\int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{t\in[1,x]}\left(\left|\frac{1}{1+t^2}\right|\right)\int_1^x t^{2n+2}|\ln t|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x t^{2n+2}\ln t\,\mathrm{d}t = \mathrm{I}_{2n+2}.$$

ii. Si $0 < x < 1$, il faut travailler sur l'intervalle $[x,1]$:

$$\left|\int_x^1 \frac{t^{2n+2}\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{t\in[x,1]}\left(\left|\frac{1}{1+t^2}\right|\right)\int_x^1 t^{2n+2}|\ln t|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x t^{2n+2}\ln t\,\mathrm{d}t = \mathrm{I}_{2n+2}.$$

le logarithme était négatif, mais les bornes étaient à l'envers, et on retombe bien sur I_{2n+2}.

Dans tous les cas, le sup sur l'intervalle a été majoré par le sup sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad \left|\mathrm{F}(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{I}_{2k}(x)\right| \leqslant \mathrm{I}_{2n+2}(x).$$

(d) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

On ne peut pas remplacer x par 0 dans l'inégalité précédente, car elle n'est valable que pour $x > 0$. Mais on peut faire tendre x vers 0, après avoir constaté que tous les termes avaient une limite, et utiliser le passage à la limite, et on obtient :

$$|\mathrm{F}(0) - u_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

(e) u_n sera une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathrm{F}(0)$ dès que $\dfrac{1}{(2n+3)^2} \leqslant 10^{-2}$ (condition suffisante).

Or, $\dfrac{1}{(2n+3)^2} \leqslant 10^{-2} \iff (2n+3)^2 \geqslant 10^2 \underset{\text{car } 2n+1\geqslant 0}{\iff} 2n+3 \geqslant 10 \iff n \geqslant \dfrac{7}{2}$.

On en déduit que u_4 est une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathrm{F}(0)$.

$\mathrm{F}(0) \simeq u_4 = 1 - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{25} - \dfrac{1}{49}$, à 10^{-2} près.

5.