Matrices et Applications linéaires

Exercice 1 :

Partie I

1 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soient $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{AX} = \mathrm{Y} \iff \begin{cases} y+z=a \\ x+z=b \\ x+y=c \end{cases} \iff \begin{cases} y+z=a \\ x-y=b-a \\ x+y=c \end{cases} \iff \begin{cases} y+z=a \\ x=\dfrac{-a+b+c}{2} \\ y=\dfrac{a-b+c}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\dfrac{-a+b+c}{2} \\ y=\dfrac{a-b+c}{2} \\ z=\dfrac{a+b-c}{2} \end{cases} \iff \mathrm{X} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathrm{Y}.$$

Donc A est inversible, et $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2 ① $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

② $\mathrm{A} = 1\mathrm{A} + 0\mathrm{I}_3$, $\mathrm{A}^2 = 1\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_3$ et $\mathrm{A}^3 = 3\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_3$,
c'est-à-dire $\lambda_1 = 1, \mu_1 = 0, \lambda_2 = 1, \mu_2 = 2, \lambda_3 = 3, \mu_3 = 2$.

3 $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par : $\quad u_1 = u_2 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

① On montre par récurrence que $\forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{A}^n = u_n\,\mathrm{A} + 2u_{n-1}\,\mathrm{I}_3$.

— $u_2\,\mathrm{A} + 2u_1\,\mathrm{I}_3 = \mathrm{A} + 2\,\mathrm{I}_3 = \mathrm{A}^2$

— Supposons que pour un certain entier $n \geqslant 2$, on ait $\mathrm{A}^n = u_n\,\mathrm{A} + 2u_{n-1}\,\mathrm{I}_3$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{n+1} &= \mathrm{A}(u_n\,\mathrm{A} + 2u_{n-1}\,\mathrm{I}_3) \\ &= u_n\,\mathrm{A}^2 + 2u_{n-1}\,\mathrm{A} \\ &= u_n\,(\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_3) + 2u_{n-1}\,\mathrm{A} \\ &= (u_n + 2u_{n-1})\,\mathrm{A} + 2u_n\mathrm{I}_3 \\ &= u_{n+1}\,\mathrm{A} + 2u_n\mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

② L'équation caractéristique de la suite est $r^2 = r + 2$. Elle admet deux solutions : -1 et 2.
On peut donc écrire $\forall n \geqslant 1, u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$
Les premiers termes fournissent $1 = -\lambda + 2\mu$ et $1 = \lambda + 4\mu$ et donc $\lambda = -\dfrac{1}{3}$ et $\mu = \dfrac{1}{3}$.
Finalement, $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \dfrac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$.

③ Ainsi, si n entier naturel non nul, $\mathrm{A}^n = u_n\,\mathrm{A} + 2u_{n-1}\,\mathrm{I}_3$ et
$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{A}^n = \dfrac{1}{3}(2^n - (-1)^n)\,\mathrm{A} + \dfrac{2}{3}(2^{n-1} - (-1)^{n-1})\,\mathrm{I}_3$.

Partie II

$\mathrm{F}_1 = \ker(f + \mathrm{I}d)$ et $\mathrm{F}_2 = \ker(f - 2\mathrm{I}d)$.

1 ① F_1 et F_2 sont des noyaux, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

② On détermine F_1 :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \mathrm{F}_1 &\iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \\ &\iff x+y+z=0 \\ &\iff x=-y-z \\ &\iff (x,y,z) = (-y-z,y,z) \\ &\iff (x,y,z) = y(-1,1,0) + z(-1,0,1) \end{aligned}$$

F_1 est le plan d'équation $x+y+z=0$ dont une base est $((-1,1,0),(-1,0,1))$
Comme on demande des vecteurs de première composante égale à 1, on peut prendre l'opposé de chaque vecteur :
On note alors $u = (1,-1,0)$ et $v = (1,0,-1)$, et $\mathcal{B}_1 = (u,v)$.
On détermine F_2 :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \mathrm{F}_2 &\iff \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ 3x-3y=0 \\ 3x-3z=0 \end{cases} \\ &\iff x=y=z \\ &\iff (x,y,z) = (x,x,x) \\ &\iff (x,y,z) = x(1,1,1) \end{aligned}$$

F_2 est la droite dirigée par $w = (1,1,1)$. $\mathcal{B}_2 = (w)$.

③ $w \notin \mathrm{F}_1$. En effet, si on avait $w \in \mathrm{F}_1$, on aurait $f(w) + w = 0$. Or comme $w \in \mathrm{F}_2$, on a $f(w) - 2w = 0$. Par soustraction, on démontrerait que $w = 0$ ce qui est absurde. Par conséquent, w n'est pas combinaison linéaire de (u,v) et donc la famille (u,v,w) est libre.
Comme on est en dimension 3, $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

④ $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2$. En effet en décomposant un vecteur quelconque a de $\mathbb{R}^3$ sur la base $\mathcal{B}$, on obtient une unique écriture, sous la forme $a = \underbrace{xu + yv}_{\in \mathrm{F}_1} + \underbrace{zw}_{\in \mathrm{F}_2}$.

2 ① Comme $u, v \in \mathrm{F}_1$, par définition, on a $f(u) = -u$ et $f(v) = -v$.

De même, $w \in \mathrm{F}_2$, donc $f(w) = 2w$. Par conséquent, $\mathrm{D} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

② $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

③ P est inversible, car ses vecteurs colonnes forment une base. $\mathrm{P}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

④ Démontrons que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$. Par récurrence :

— Par les formules de changement de base, on a $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ ou encore $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

— Supposons que $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.
Alors $\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{A}^n \times \mathrm{A} = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PD}^n\mathrm{I}_3\mathrm{DP}^{-1} = \mathrm{PD}^n \times \mathrm{DP}^{-1} = \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$.

⑤ Comme D est diagonale, alors $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & -2(-1)^n & (-1)^n \\ (-1)^n & (-1)^n & -2(-1)^n \\ 2^n & 2^n & 2^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On obtient le même résultat que dans la partie I : $\mathrm{A}^n = \dfrac{1}{3}(2^n - (-1)^n)\mathrm{A} + \dfrac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)\mathrm{I}_3$