Matrices et applications linéaires

Une seule réponse exacte par question.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Quel est le vecteur $u(e_1 + e_2 + e_3)$?

   (a) ☑ $2e_1 + 3e_2$ (b) ☐ $2e_1 + e_2 - e_3$ (c) ☐ $e_1 + e_2 + e_3$ (d) ☐ $e_2 + 3e_3$

2. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. A la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ et A′ la matrice de u dans une autre base $\mathcal{B}'$. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a :

   (a) ☐ $\mathrm{A}' = \mathrm{PA}$ (b) ☐ $\mathrm{A}' = \mathrm{AP}^{-1}$ (c) ☐ $\mathrm{A}' = \mathrm{PAP}^{-1}$ (d) ☑ $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$

3. Soit E l'espace vectoriel de fonctions engendré par $\mathcal{B} = (\sin, \cos)$. Quelle est la matrice de l'application linéaire $f \mapsto f'$ dans la base $\mathcal{B}$?

   (a) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) ☑ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) ☐ $\begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x \end{pmatrix}$

4. Le rang d'une matrice A de taille $n \times p$ est

   (a) ☐ le nombre de colonnes non nulles de A
   (b) ☑ inférieur au nombre de colonnes non nulles de A
   (c) ☐ supérieur au nombre de colonnes non nulles de A
   (d) ☐ n moins le nombre de colonnes non nulles de A

5. La matrice d'un endomorphisme u dans une base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   Sa matrice dans la base (e_2, e_1) est

   (a) ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (b) ☐ $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) ☑ $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (d) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

6. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base d'un plan vectoriel E et $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_2)$. Si un vecteur a pour coordonnées (x, y) dans la base $\mathcal{B}$, ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$ sont

   (a) ☐ $(x + y, y)$ (b) ☐ $(x, x + y)$ (c) ☑ $(x, y - x)$ (d) ☐ $(x + y, -x)$

7. Laquelle des matrices suivantes définit un projecteur de $\mathbb{R}^2$?

(a) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) ☑ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. Soit E l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'endomorphisme f de E défini par $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$.
La matrice de f dans la base canonique de E est

(a) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (d) ☑ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. Soit s une symétrie de E et $\mathcal{B}$ une base quelconque de E.
La matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est

(a) ☐ symétrique (b) ☐ diagonale (c) ☐ triangulaire (d) ☑ inversible

10. Soit E un espace vectoriel dont (e_1, e_2, e_3) est une base. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = e_1$.
La matrice de u dans la base $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ est

(a) ☑ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. Soit A une matrice carrée réelle de taille 4 telle que $\mathrm{A}^2 = 0$.
L'ensemble des valeurs que peut prendre le rang de A est :

(a) ☐ $\{0\}$ (b) ☐ $\{0, 1\}$ (c) ☑ $\{0, 1, 2\}$ (d) ☐ $\{0, 1, 2, 3\}$