Séries numériques

Une seule réponse exacte par question.

1. Combien vaut la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$?

   (a) ☐ $\frac{3}{2}$ (b) ☑ $\frac{1}{2}$ (c) ☐ $\frac{3}{4}$ (d) ☐ $\frac{1}{4}$

2. Pour quelles valeurs de $a > 0$ la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\sinh n}{a^n}$ est-elle convergente ?

   (a) ☐ toutes (b) ☐ $a \geqslant 1$ (c) ☐ $a > 1$ (d) ☑ $a > e$

3. Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\sum \ln(u_n)$ converge.
   Quelle série n'est pas nécessairement convergente ?

   (a) ☑ $\sum u_n$ (c) ☐ $\sum \frac{u_n}{2^n}$

   (b) ☐ $\sum e^{-nu_n}$ (d) ☐ $\sum (u_{n+1} - u_n)$

4. Soit $\alpha > 0$ et P pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1$. La série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si

   (a) ☐ $\alpha > 1$ (b) ☑ $\alpha > \frac{1}{2}$ (c) ☐ $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ (d) ☐ $\alpha > 2$

5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. Laquelle des hypothèses suivantes sur la suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet de dire que la série $\sum v_n$ converge aussi ?

   (a) ☐ $u_n \sim v_n$ (c) ☑ $n^2 v_n = \mathrm{o}(u_n)$

   (b) ☐ $v_n = \mathrm{o}(u_n)$ (d) ☐ $\forall n, \quad v_n \leqslant u_n$

6. A laquelle des séries suivantes ne peut-on pas appliquer le critère spécial de convergence des séries alternées ?

   (a) ☐ $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (c) ☑ $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$

   (b) ☐ $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n} \mathrm{d}x$ (d) ☐ $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

7. Laquelle des hypothèses suivantes sur la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'affirmer que $\sum u_n$ converge ?

   (a) ☐ $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

   (b) ☐ $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0

   (c) ☑ $u_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{n^2}{2^n}\right)$

   (d) ☐ $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

8. Combien vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}$?

   (a) ☐ $\dfrac{e}{2}$

   (b) ☑ $\sqrt{e}$

   (c) ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

   (d) ☐ e^2

9. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Quelle condition est suffisante pour garantir que cette série converge ?

   (a) ☐ $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$

   (b) ☐ $u_n^2 \leqslant \dfrac{1}{n}$

   (c) ☑ $\sqrt{u_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$

   (d) ☐ $e^{u_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$

10. Pour laquelle des séries suivantes le critère de d'Alembert permet-il de montrer la convergence ?

    (a) ☐ $\sum \dfrac{1}{n \ln^2 n}$

    (b) ☑ $\sum \dfrac{n}{2^n}$

    (c) ☐ $\sum \dfrac{\sin n}{n}$

    (d) ☐ $\sum \dfrac{1}{n^2}$

11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, A la propriété « $\sum u_n$ converge » et B la propriété « $\sum u_n^2$ converge ». Alors

    (a) ☐ A $\Longrightarrow$ B

    (b) ☐ B $\Longrightarrow$ A

    (c) ☐ A $\Longleftrightarrow$ B

    (d) ☑ il n'y a pas d'implication entre A et B.

12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2})$ vaut

    (a) ☐ u_0

    (b) ☑ $u_0 - u_1$

    (c) ☐ $u_0 - 2u_1 + u_2$

    (d) ☐ l'hypothèse ne suffit pas pour dire que la série proposée converge.

13. Je suis une série qui converge grâce au critère spécial de convergence des séries alternées, mais je ne suis pas absolument convergente. Qui suis-je ?

    (a) ☑ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

    (b) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

    (c) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

    (d) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$

14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives. Quel lien logique y a-t-il entre les propositions A :« $\sum u_n$ converge » et B :« $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ » ?

   (a) ☐ A $\implies$ B
   (b) ☐ B $\implies$ A
   (c) ☐ A $\iff$ B
   (d) ☑ il n'y a pas d'implication entre A et B.

15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Quelle condition est suffisante pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

   (a) ☐ $\sum \sin u_n$ converge
   (b) ☐ $\sum \frac{u_n}{2^n}$ converge
   (c) ☑ $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge
   (d) ☐ $\sum u_{2n}$ converge

16. Pour laquelle des séries suivantes sait-on facilement calculer la somme ?

   (a) ☐ $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$
   (b) ☑ $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$
   (c) ☐ $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+1}$
   (d) ☐ $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2^n+1}$