Matrices et Intégration

Problème 1 :

Partie A Intégrales de Wallis [1]

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Calculer W_0 et W_1
3. Montrer que la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W}_n \neq 0$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$(n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n.$$
Aide: On pourra utiliser habilement la relation $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
6. Montrer que la suite $\Big((n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et calculer la valeur de cette constante.
7. En utilisant la monotonie de la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_n} \leqslant 1.$$
En déduire que $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{W}_{n+1}$.
8. Déduire des questions précédentes que $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{W}_n$.
9. Montrer que pour tout $p \geqslant 0$, on a :
$$\begin{cases} \mathrm{W}_{2p} &= \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}, \\ \mathrm{W}_{2p+1} &= \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases}$$

À suivre ...

[1]. **John Wallis** (1616 Ashford-1703 Oxford). On lui doit le symbole ∞ introduit dans son ouvrage *De sectionibus conicis tractatus*,1656

Problème 2 (D'après ENSTIM 2009) :

Notation : $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et leurs fonctions polynomiales associées.

On note $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

On définit les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longmapsto & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & & \frac{1}{2}\left[\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right) + \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right] \end{array} \quad \text{et} \quad \phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & & \mathrm{P}(1) \end{array}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]}$ et que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f^n = f \circ f^{n-1}$.

Partie A

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, et montrer que f est linéaire.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?
4. Quelle est la dimension de $\ker\phi$? Déterminer une base de $\ker\phi$.
5. L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?

Partie B

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par :

$$\mathcal{B}' = (1\ ,\ -2\mathrm{X}+1\ ,\ 6\mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X} + 1)$$

1. Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
2. Écrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
3. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
4. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
5. Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\cdot 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{4^n} - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on considère $\mathrm{P} = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2$.
Déterminer $f^n(\mathrm{P})$ en fonction de a, b et c.
7. En déduire que $\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi\big(f^n(\mathrm{P})\big) = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$.