Matrices et Intégration

Problème 1 :

Partie A Intégrales de Wallis

1. On pose $x = \frac{\pi}{2} - u$ *i.e.* $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ et on a :

$$\mathrm{W}_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\tfrac{\pi}{2} - u\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. $\mathrm{W}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ et $\mathrm{W}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \left[\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{W}_{n+1} - \mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^n(x)}_{\substack{\geqslant 0 \text{ sur} \\ [0\,;\frac{\pi}{2}]}} \underbrace{\big(\cos(x) - 1\big)}_{\leqslant 0}\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

La suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
De plus, $\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos^n(x)$. Par positivité de l'intégrale, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \mathrm{W}_n$.
La suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante et minorée, est donc convergente vers une limite positive ou nulle.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $\mathrm{W}_n \geqslant 0$. Comme la fonction $x \longmapsto \cos^n(x)$ est continue et positive sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, si l'intégrale était nulle, la fonction $x \longmapsto \cos^n(x)$ serait nécessairement nulle sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ ce qui n'est pas car elle vaut 1 en 0.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W}_n \neq 0$. Mieux, on a même $\mathrm{W}_n > 0$.

5. Les fonctions $x \longmapsto \cos^{n+1}(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut intégrer par parties W_n et on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cancel{\left[\sin(x)\cos^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(x))\cos^n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (n+1)\mathrm{W}_n - (n+1)\mathrm{W}_{n+2} \\ (n+2)\mathrm{W}_{n+2} &= (n+1)\mathrm{W}_n.\end{aligned}$$

6. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n$, d'où :

$$(n+2)\mathrm{W}_{n+2}\mathrm{W}_{n+1} - (n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n = (n+1)\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n+1} - (n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n = 0.$$

La suite $\big((n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante, égale, par exemple à son premier terme $\mathrm{W}_1\mathrm{W}_0 = \frac{\pi}{2}$ d'après la question (2) *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n = \frac{\pi}{2}.$$

7. Comme la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante d'après (3), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W}_{n+2} \leqslant \mathrm{W}_{n+1} \leqslant \mathrm{W}_n$.
Comme W_n est strictement positif d'après (4), on peut diviser les membres de cette inéquation par W_n et d'obtenir :

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{\mathrm{W}_{n+2}}{\mathrm{W}_n} \leqslant \frac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_n} \leqslant 1.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, d'après le théorème d'encadrement il en est de même du quotient $\frac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_n}$ *i.e.* $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{W}_{n+1}$.

8. D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n}{n\mathrm{W}_n^2} = 1$ *i.e.* , d'après (6),

$$n\mathrm{W}_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n = \frac{\pi}{2}.$$

Finalement, $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et, en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{W}_n = 0$.

9. D'après la question (5), pour tout $p \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_{2p} &= \frac{2p-1}{2p}\mathrm{W}_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)}\mathrm{W}_{2p-4} = \dots \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3)\times\ldots\times 5\times 3\times 1}{2p(2p-2)\times\ldots\times 6\times 4\times 2} \times \mathrm{W}_0 \\ &= \frac{(2p)!}{\big(2p(2p-2)\times\ldots\times 6\times 4\times 2\big)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

De même pour les termes d'indices impairs :

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1}\mathrm{W}_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)}\mathrm{W}_{2p-3} = \dots \\ &= \frac{2p(2p-2)\times\ldots\times 6\times 4\times 2}{(2p+1)(2p-1)\times\ldots\times 5\times 3} \times \mathrm{W}_1 \\ &= \frac{\big(2p(2p-2)\times\ldots\times 6\times 4\times 2\big)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \\ &= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.\end{aligned}$$

Problème 2 :

Partie A

1. — Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. On a $\deg(\mathrm{P}) \leqslant 2$.
Par conséquent $\deg \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right) = \deg \mathrm{P} \times \deg \frac{\mathrm{X}}{2} = \deg \mathrm{P} \leqslant 2$.
De même, $\deg \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}+1}{2}\right) \leqslant 2$.
Donc,
$$\begin{aligned}\deg \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{P}\left(\tfrac{\mathrm{X}}{2}\right) + \mathrm{P}\left(\tfrac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right] &= \deg\left[\mathrm{P}\left(\tfrac{\mathrm{X}}{2}\right) + \mathrm{P}\left(\tfrac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right] \\ &\leqslant \max\left[\deg \mathrm{P}\left(\tfrac{\mathrm{X}}{2}\right), \deg \mathrm{P}\left(\tfrac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right] \leqslant 2.\end{aligned}$$
On a prouvé que $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est stable par f *i.e.* f est correctement définie.
— Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q}) &= \tfrac{1}{2}\left[(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})\left(\tfrac{\mathrm{X}}{2}\right) + (\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})\left(\tfrac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\lambda\mathrm{P}\left(\tfrac{\mathrm{X}}{2}\right) + \mathrm{Q}\left(\tfrac{\mathrm{X}}{2}\right) + \lambda\mathrm{P}\left(\tfrac{\mathrm{X}+1}{2}\right) + \mathrm{Q}\left(\tfrac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right] \\ &= \tfrac{\lambda}{2}\left[\mathrm{P}\left(\tfrac{\mathrm{X}}{2}\right) + \mathrm{P}\left(\tfrac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right] + \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{Q}\left(\tfrac{\mathrm{X}}{2}\right) + \mathrm{Q}\left(\tfrac{\mathrm{X}+1}{2}\right)\right] \\ &= \lambda f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q})\end{aligned}$$

Donc f est bien linéaire.

2. Rapidement, $f(1) = 1$, $f(\mathrm{X}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{X}$ et $f(\mathrm{X}^2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\mathrm{X} + \frac{1}{4}\mathrm{X}^2$.
Donc,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

3. La matrice de f est triangulaire supérieure et les éléments de sa diagonale sont non nuls.
   Par conséquent, elle est inversible. f est alors bijective, injective et surjective.
4. ϕ est une forme linéaire. Donc $\operatorname{Im}\phi \subset \mathbb{R}$ et $\dim \operatorname{Im}\phi \leqslant \dim \mathbb{R} = 1$.
   Soit $\dim \operatorname{Im}\phi = 0$, ce qui signifie que $\operatorname{Im}\phi = \{0\}$, et donc $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \phi(\mathrm{P}) = 0$. Ce n'est clairement pas le cas en prenant $\mathrm{P} = 1$.
   D'où, $\dim \operatorname{Im}\phi = 1$. (on vient de redémontrer qu'une forme linéaire est soit nulle, soit surjective).
   D'après le théorème du rang, $\dim \ker\phi + \dim \operatorname{Im}\phi = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, donc $\dim\ker\phi = 2$.
   Soit maintenant $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. Posons $\mathrm{P} = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2$.
   $$\begin{aligned} \mathrm{P} \in \ker\phi &\iff \phi(\mathrm{P}) = 0 \iff \mathrm{P}(1) = 0 \\ &\iff a + b + c = 0 \\ &\iff a = -b - c \iff \mathrm{P} = -b - c + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2 \\ &\iff \mathrm{P} = b(\mathrm{X} - 1) + c(\mathrm{X}^2 - 1) \\ &\iff \mathrm{P} \in \operatorname{vect}(\mathrm{X} - 1, \mathrm{X}^2 - 1) \end{aligned}$$
   La famille $(\mathrm{X} - 1, \mathrm{X}^2 - 1)$ est donc génératrice de $\ker\phi$. Ayant deux éléments dans un espace de dimension 2, elle en forme une base.
5. — On a vu que $\dim \operatorname{Im}\phi = 1$.
     Or, $\operatorname{Im}\phi \subset \mathbb{R}$, donc $\operatorname{Im}\phi = \mathbb{R}$: ϕ est surjective.
   — D'autre part, $\dim\ker\phi = 2 > 0$: ϕ n'est pas injective.

Partie B

1. $\mathcal{B}'$ est échelonnée en degrés, donc elle est libre. De plus, elle compte 3 vecteurs en dimension 3 :
   $$\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[\mathrm{X}].$$
2. On écrit la nouvelle base dans l'ancienne :
   $$\mathrm{Q} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
3. Q est une matrice de changement de base. Elle est donc inversible.
   À l'aide l'algorithme de Gauss-Jordan, il est relativement facile d'inverser une matrice triangulaire :
   $$\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}).$$
4. D'après les formules de changement de base,
   $$\mathrm{M} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

5. On vient de diagonaliser la matrice A : $\mathrm{A} = \mathrm{Q}\mathrm{M}\mathrm{Q}^{-1}$.
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{A}^n = \mathrm{Q}\mathrm{M}^n\mathrm{Q}^{-1}$ (après simplification de tous les $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Q} = \mathrm{I}_3$).
   Or, M étant diagonale, on accède très facilement à $\mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$.
   Il reste à calculer $\mathrm{A}^n = \mathrm{Q}\mathrm{M}^n\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$
   $$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\cdot 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{4^n} - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}.$$
6. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, et $\mathrm{P} = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n(\mathrm{P})) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n)\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{P}) = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\cdot 4^n}\right) c \\ \frac{b}{2^n} + \left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{2^n}\right) c \\ \frac{c}{4^n} \end{pmatrix}$$
   D'où, $f^n(\mathrm{P}) = \left[a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\cdot 4^n}\right) c\right] + \left[\frac{b}{2^n} + \left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{2^n}\right) c\right] \mathrm{X} + \left[\frac{c}{4^n}\right] \mathrm{X}^2$.
7. On en déduit que
   $$\phi(f^n(\mathrm{P})) = \left[a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6\cdot 4^n}\right) c\right] + \left[\frac{b}{2^n} + \left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{2^n}\right) c\right] + \left[\frac{c}{4^n}\right].$$
   Et en faisant tendre n vers $+\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \phi(f^n(\mathrm{P}))\phi(f^n(\mathrm{P})) = a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3}$.
   Or, on a aussi $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \left[at + b\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$.
   Finalement, on a bien $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \phi(f^n(\mathrm{P})) = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$.