Stirling and Gauss

On appelle intégrale de Gauss la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ *que l'on note encore* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.
Le but de ce problème est de justifier son existence et de donner une méthode pour calculer sa valeur.

Partie B Formule de Stirling [1]

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ et $b_n = \ln(a_n)$.

1. Montrer que, $\forall n\geqslant 1$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = e\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}}$.

2. Montrer que $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

3. En déduire la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.

4. Justifier alors que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et en déduire que la suite (a_n) converge vers un réel $\lambda>0$.

5. En déduire qu'on peut écrire $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$.

6. En utilisant les résultats de la partie A (*confer* devoir précédent), déterminer la valeur de λ et finalement la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Partie C Intégrale de Gauss [2]

On pose $\mathrm{F}: \begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+ & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\end{array}$.

1. Montrer que F est strictement croissante.

2. Pour $x\in[1\,;+\infty[$, montrer soigneusement que $e^{-x^2}\leqslant e^{-x}$.

3. En déduire que F est majorée puis que F admet une limite en $+\infty$.
Dans toute la suite, on notera $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ *cette limite.*

4. Montrer que : $\forall u\in]-1\,;+\infty[$, $\ln(1+u)\leqslant u$.

5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
   (b) En utilisant le changement de variable $t=\sqrt{n}\cos u$, montrer que :
   $$\sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n+1}\leqslant\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

6. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que : $\forall t\in\mathbb{R}$, $e^{-t^2}\leqslant\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.
   (b) En posant $t=\sqrt{n}\tan u$, montrer que
   $$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\mathrm{B}}\cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t,$$
   où $\mathrm{B}\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $p\in\mathbb{N}$ sont à déterminer.
   (c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\mathrm{B}}\cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}-\mathrm{B}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}(t)\,\mathrm{d}t$.
   (d) Déduire des questions précédentes que :
   $$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n-2}.$$

7. Déterminer alors la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

[2]. **James Stirling** (1692 Garden-1770 Edimbourg). Sa célèbre formule donnant un équivalent de $n!$ apparaît en 1730 dans son ouvrage *Methodus Differentialis*

[2]. **Karl Friedrich Gauss** (1777 Brunswick-1855 Göttingen). La valeur de l'intégrale de Gauss est à retenir et apparaît dans de nombreux domaines (probabilités, physique,...).