# Déterminant

**Exercice 1 :** On pose $\mathrm{D}_n(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x+2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & x+2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x+2 \end{vmatrix}$ (déterminant de taille $n$).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé). Prouver que la suite $(\mathrm{D}_n(x))_{n\geqslant 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.
2. Montrer que $x \mapsto \mathrm{D}_n(x)$ est une fonction polynomiale de degré $n$.
   Préciser son coefficient dominant.
3. On suppose dans cette question que $|x+2| < 2$.
   1. Justifier qu'on peut poser $x+2 = 2\cos\theta$ avec $\theta \in ]0, \pi[$.
   2. Exprimer $\mathrm{D}_n(x)$ en fonction de $\sin((n+1)\theta)$ et $\sin\theta$.
4. En déduire les racines du polynôme $\mathrm{D}_n$ puis la factorisation de $\mathrm{D}_n$.
5. En calculant $\mathrm{D}_n(0)$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$

**Exercice 2 :** On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0$. On note $\mathrm{I}d$ l'identité de $\mathbb{R}^3$.

$f$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}_0$ est $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer *avec élégance* : $\chi(x) = \det(\mathrm{A} - x\mathrm{I}_3)$.
   On vérifiera que le polynôme $\chi$ admet exactement deux racines $\lambda$ et $\mu$ ($\lambda < \mu$).
2. Déterminer une base de $\mathrm{F} = \ker(f - \lambda \mathrm{I}d)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{G} = \ker(f - \mu \mathrm{I}d)$.
4. Montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{R}^3$.
5. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale. Écrire cette matrice.
6. Déterminer l'expression de $\mathrm{A}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que :

- $\chi$ est le *polynôme caractéristique* de A (ou $f$).
- $\lambda$ et $\mu$ sont les *valeurs propres* de A (ou $f$).
- $\mathrm{E}_0$ et $\mathrm{E}_1$ sont les *espaces propres* de A (ou $f$).
- les vecteurs non nuls de $\mathrm{E}_0$ et $\mathrm{E}_1$ sont les *vecteurs propres* de A (ou $f$).