Déterminant

Exercice 1 :

1 Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé) et $n \geqslant 3$.
En développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\mathrm{D}_n(x) = (x+2)\mathrm{D}_{n-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & x+2 & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 1 & x+2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x+2 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

En développant le déterminant de taille $n-1$ par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\forall n \geqslant 3, \quad \mathrm{D}_n(x) = (x+2)\mathrm{D}_{n-1}(x) - \mathrm{D}_{n-2}(x).$$

La suite $(\mathrm{D}_n(x))_{n\geqslant 1}$ est bien **récurrente linéaire d'ordre 2**.

2 Montrons que par récurrence double sur n que pour tout $n \geqslant 1$, D_n est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant 1.

- $\begin{cases} \mathrm{D}_1(x) = x+2 \\ \mathrm{D}_2(x) = (x+2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 3 \end{cases}$. La propriété est bien vérifiée aux rangs 1 et 2.
- Soit $n \geqslant 3$. Supposons que la propriété soit vérifiée aux rangs $n-1$ et $n-2$.
  D_{n-1} et D_{n-2} sont donc des fonctions polynomiales.
  Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{D}_n(x) = (x+2)\mathrm{D}_{n-1}(x) - \mathrm{D}_{n-2}(x)$, on en déduit que D_n est encore une **fonction polynomiale**.
  De plus, $\begin{cases} \mathrm{D}_{n-1} = x^{n-1} + \cdots \\ \mathrm{D}_{n-2} = x^{n-2} + \cdots \end{cases}$, les pointillés représentant des termes de degré inférieur à celui qui précède.
  Alors,
  $$\begin{aligned} \mathrm{D}_n(x) &= (x+2)\mathrm{D}_{n-1}(x) - \mathrm{D}_{n-2}(x) \\ &= (x+2)[x^{n-1} + \cdots] - [x^{n-2} + \cdots] \\ &= x^n + \cdots \end{aligned}$$
  D_n est encore une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant 1.

3 On suppose dans cette question que $|x+2| < 2$.

① Par hypothèse, $|x+2| < 2$, donc $\left|\dfrac{x+2}{2}\right| < 1$ ou encore $-1 < \dfrac{x+2}{2} < 1$.
On en déduit qu'il existe $\theta \in]0, \pi[$ tel que $x + 2 = 2\cos\theta$.
On peut même exprimer $\theta = \arccos \dfrac{x+2}{2}$.

② La relation de récurrence linéaire double est : $\mathrm{D}_n(x) = (x+2)\mathrm{D}_{n-1}(x) - \mathrm{D}_{n-2}(x)$.
L'équation caractéristique est $r^2 - (x+2)r + 1 = 0$ ou encore $r^2 - (2\cos\theta)r + 1 = 0$.
Son discriminant réduit est $\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta = (i\sin\theta)^2$.
L'équation caractéristique admet deux solutions complexes : $r = \cos + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et son conjugué.

D'après le cours, il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{D}_n(x) = \lambda\cos n\theta + \mu\sin n\theta$$

Or $\begin{cases} \mathrm{D}_1(x) = x+2 \\ \mathrm{D}_2(x) = (x+2)^2 - 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda\cos\theta + \mu\sin\theta = 2\cos\theta \\ \lambda\cos 2\theta + \mu\sin 2\theta = 4\cos^2\theta - 1 \end{cases}$.

On peut écrire le système matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 4\cos^2\theta - 1 \end{pmatrix}$$

Or $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{vmatrix} = \cos\theta\sin 2\theta - \cos 2\theta\sin\theta = \sin\theta \neq 0$ (puisque $\theta \in]0, \pi[$).

On en déduit que la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $\dfrac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \sin 2\theta & -\sin\theta \\ -\cos 2\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

D'où

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \sin 2\theta & -\sin\theta \\ -\cos 2\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 4\cos^2\theta - 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} 2\cos\theta\sin 2\theta - \sin\theta(4\cos^2\theta - 1) \\ -2\cos\theta\cos 2\theta + \cos\theta(4\cos^2\theta - 1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où $\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{D}_n(x) = \cos n\theta + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin n\theta = \dfrac{\sin\theta\cos n\theta + \cos\theta\sin n\theta}{\sin\theta}$.

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{D}_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

4 Posons $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$. Les θ_k sont k valeurs distinctes de $]0, \pi[$.
À chaque θ_k est associé un x_k par la formule $x_k + 2 = 2\cos\theta_k$. Comme la fonction $\theta \mapsto 2\cos\theta - 2$ est strictement décroissante sur $]0, \pi[$, elle est donc injective, et les x_k sont tous distincts.
Mais $\mathrm{D}_n(x_k) = \dfrac{\sin((n+1)\theta_k)}{\sin\theta_k} = \dfrac{\sin(k\pi)}{\sin\theta_k} = 0$. Donc les $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont des racines distinctes de D_n.
Et comme D_n est de degré n, il ne peut avoir plus de n racines.

Remarque : $x_k = 2(\cos(\theta_k) - 1) = 2\left(1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\theta_k}{2}\right) - 1\right) = -4\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right)$.

Les racines de D_n sont donc les $-4\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2(n+1)}\right)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
Comme le coefficient dominant de D_n est 1, on en déduit directement la factorisation :

$$\mathrm{D}_n = \prod_{k=1}^{n}\left[\mathrm{X} + 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)\right].$$

5 On montre facilement que $\forall n \geqslant 1, \mathrm{D}_n(0) = n+1$.

On en déduit que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = n+1$ puis (le produit des sinus étant positif) que :

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}.$$

Exercice 2 :

1 Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi(x) = \det(\mathrm{A} - x\mathrm{I}_3) = \begin{vmatrix} 4-x & 0 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 \\ -4 & 0 & -2-x \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième colonne,

$$\begin{aligned}
&= +(2-x)\begin{vmatrix} 4-x & 2 \\ -4 & -2-x \end{vmatrix} \\
&= +(2-x)\begin{vmatrix} 4-x & 2 \\ -x & -x \end{vmatrix} \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\
&= -x(2-x)\begin{vmatrix} 4-x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -x(2-x)\begin{vmatrix} 2-x & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2 \\
&= -x(2-x)^2
\end{aligned}$$

On a donc $\chi(x) = -x(2-x)^2$.

Le polynôme χ admet effectivement deux racines : $\lambda = 0$ de multiplicité 1 et $\mu = 2$ de multiplicité 2.

2 Posons $u = (x, y, z)$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{F} &\iff u \in \ker(f - \lambda\mathrm{Id}) \iff (f - 0\mathrm{Id})(u) = 0 \iff f(u) = 0 \\
&\iff \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{3,1} \iff \begin{cases} 4x + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -4x - 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z = -2x \\ y = x \\ x = x \end{cases} \iff u = (x, x, -2x) \\
&\iff u \in \mathrm{vect}\left((1, 1, -2)\right)
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{F} = \mathbb{R}u_0$ en posant $u_0 = (1, 1, -2)$: F est un sev de dimension 1.

3 Posons $u = (x, y, z)$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{G} &\iff u \in \ker(f - \mu\mathrm{Id}) \iff (f - 2\mathrm{Id})(u) = 0 \\
&\iff \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{3,1} \\
&\iff \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -4x - 4z = 0 \end{cases} \iff x + z = 0 \iff \begin{cases} x = -z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \\
&\iff u = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff u \in \mathrm{vect}\left((1, 0, -1), (0, 1, 0)\right).
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{G} = \mathrm{vect}(v_0, w_0)$ en posant $v_0 = (1, 0, -1)$ et $w_0 = (0, 1, 0)$.
Les vecteurs v_0 et w_0 sont non colinéaires ; la famille (v_0, w_0) est donc une base de G, qui est donc de dimension 2.

4 Considérons la famille $\mathcal{B} = (u_0, v_0, w_0)$.

La matrice de cette famille dans la base $\mathcal{B}_0$ est $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

On a $\det \mathrm{P} = -1 \neq 0$, donc $\mathcal{B}$ est une base de E.
Par conséquent, $\mathrm{vect}\left(\{u_0\}\right) \oplus \mathrm{vect}\left(\{v_0, w_0\}\right) = \mathbb{R}^3$, i.e. $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{R}^3$.

5 Par construction, on a $f(u_0) = 0$, $f(v_0) = 2v_0$, et $f(w_0) = 2w_0$.
Et donc,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \Delta \text{ en posant } \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6 On peut exprimer A en fonction de Δ par les formules de changement de base :

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}.$$

On a donc (classique) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{A}^n = \mathrm{P}\Delta^n\mathrm{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{Donc,} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2^n \\ 2^n & 2^n & 2^n \\ -2^{n+1} & 0 & -2^n \end{bmatrix}.$$

Commentaire: *On pouvait également prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{A}^n = 2^{n-1}\mathrm{A}$, après l'avoir remarqué directement.*
Enfin, on pouvait constater que $\frac{1}{2}\Delta$ était une matrice de projecteur. Par conséquent, f est un projecteur. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\frac{1}{2}f\right)^n = \left(\frac{1}{2}f\right)$ et donc $f^n = 2^{n-1}f$. Il suffisait alors d'interpréter matriciellement cette écriture.