Arithmétique

On note $\mathbb{Q}(i)$ l'ensemble $\left\{a+bi, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$.

On se propose d'établir le théorème suivant :

Théorème 1

Il n'existe aucun complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que z et e^z soient simultanément dans $\mathbb{Q}(i)$.

Ce théorème est suffisant pour démontrer l'irrationalité de $\pi, \ln 2, \ln 3, e, e^2, e^3, \dots$.

1. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{I}_n(z) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{n!} e^{tz} \,\mathrm{d}t$.
   (a) Calculer $\mathrm{I}_0(z)$ et $\mathrm{I}_1(z)$.
   (b) Trouver une relation entre $\mathrm{I}_{n+2}(z)$, $\mathrm{I}_{n+1}(z)$ et $\mathrm{I}_n(z)$.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence d'un polynôme A_n à coefficients entiers, tel que :
   $$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \mathrm{I}_n(z) = \frac{e^z \mathrm{A}_n(z) - e^{-z}\mathrm{A}_n(-z)}{z^{2n+1}}$$
   (d) Préciser le degré et le coefficient dominant de A_n.
2. (a) Montrer que si ω est dans $\mathbb{Q}(i) \setminus \{0\}$, alors $\dfrac{1}{\omega}$ est encore dans $\mathbb{Q}(i)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \left\{a+bi, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ est stable par addition et multiplication.
3. On démontre maintenant le théorème annoncé en raisonnant par l'absurde : on suppose qu'il existe un $z \in \mathbb{C}^*$ tel que z et e^z soient simultanément dans $\mathbb{Q}(i)$.
   (a) Montrer l'existence de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k^n \mathrm{I}_n(z) \in \mathbb{Z}[i]$.
   (b) Montrer que la suite $(k^n \mathrm{I}_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   En déduire que la suite $(\mathrm{I}_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang n_0.
   (c) On note $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$. On choisit $\delta \in]0,1[$ tel que $\delta|y| < \dfrac{\pi}{3}$.
      i. Montrer que pour $n \geqslant n_0$,
      $$\int_0^1 (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(yt)\,\mathrm{d}t = 0$$
      ii. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que :
      $$\int_0^\delta (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(yt)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1-(1-\delta)^{n+1}}{2(n+1)}$$
      iii. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir :
      $$\left|\int_\delta^1 (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(yt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (1-\delta^2)^n \cosh x$$
   (d) Trouver une contradiction.
4. (a) Montrer que π est irrationnel.
   (b) Montrer que e et e^2 sont irrationnels. Généraliser.
   (c) Montrer que $\ln 2$ et $\ln 3$ sont irrationnels. Généraliser.