Arithmétique

On note $\mathbb{Q}(i)$ l'ensemble $\left\{a+bi,(a,b)\in\mathbb{Q}^2\right\}$.

On se propose d'établir le théorème suivant :

Il n'existe aucun complexe $z\in\mathbb{C}^*$ tel que z et e^z soient simultanément dans $\mathbb{Q}(i)$.

Ce théorème est suffisant pour démontrer l'irrationalité de $\pi,\ln 2,\ln 3,e,e^2,e^3,\dots$.

1. Pour $z\in\mathbb{C}^*$ et $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathrm{I}_n(z)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^n}{n!}\,e^{tz}\,\mathrm{d}t$.

(a)

$$\mathrm{I}_0(z)=\int_{-1}^{1}e^{tz}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{e^{tz}}{z}\right]_{-1}^{1}=\frac{e^z-e^{-z}}{z}$$

$$\mathrm{I}_0(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{z}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1(z)=\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,e^{tz}\,\mathrm{d}t&=\left[(1-t^2)\frac{e^{tz}}{z}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}-2t\frac{e^{tz}}{z}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{z}\int_{-1}^{1}te^{tz}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{z}\left(\left[t\frac{e^{tz}}{z}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{e^{tz}}{z}\,\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{2(e^z+e^{-z})}{z^2}-\frac{2}{z^2}\left[\frac{e^{tz}}{z}\right]_{-1}^{1}\\&=\frac{2(e^z+e^{-z})}{z^2}-\frac{2(e^z-e^{-z})}{z^3}\end{aligned}$$

$$\mathrm{I}_1(z)=\frac{2(e^z+e^{-z})}{z^2}-\frac{2(e^z-e^{-z})}{z^3}$$

(b) On intègre $\mathrm{I}_{n+2}(z)$ par parties, $t\mapsto\dfrac{(1-t^2)^{n+2}}{(n+2)!}$ et $t\mapsto\dfrac{e^{tz}}{z}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$.

$$\mathrm{I}_{n+2}(z)=\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{n+2}}{(n+2)!}\,e^{tz}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{(1-t^2)^{n+2}}{(n+2)!}\frac{e^{tz}}{z}\right]_{t=-1}^{t=1}-\int_{-1}^{1}\frac{-2t(1-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{e^{tz}}{z}\,\mathrm{d}t$$

Le crochet étant nul puisque $n+2\geqslant 1$, on a $\mathrm{I}_{n+2}(z)=\dfrac{2}{z}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{t(1-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}e^{tz}\,\mathrm{d}t$.

On réintègre par parties :

$$\mathrm{I}_{n+2}(z)=\frac{2}{z}\left(\left[\frac{t(1-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{e^{tz}}{z}\right]_{t=-1}^{t=1}-\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{n+1}-2(n+1)t^2(1-t^2)^n}{(n+1)!}\frac{e^{tz}}{z}\,\mathrm{d}t\right)$$

A nouveau, le crochet est nul (puisque $n+1\geqslant 1$) :

$$\mathrm{I}_{n+2}(z)=-\frac{2}{z^2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}e^{tz}\,\mathrm{d}t+\frac{4}{z^2}\int_{-1}^{1}\frac{t^2(1-t^2)^n}{n!}e^{tz}\,\mathrm{d}t$$

Dans la deuxième intégrale, on écrit $t^2=1-(1-t^2)$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{t^2(1-t^2)^n}{n!}e^{tz}\,\mathrm{d}t&=\int_{-1}^{1}\frac{[1-(1-t^2)](1-t^2)^n}{n!}e^{tz}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^n}{n!}e^{tz}\,\mathrm{d}t-\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n!}e^{tz}\,\mathrm{d}t\\&=\mathrm{I}_n(z)-(n+1)\mathrm{I}_{n+1}(z)\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n+2}(z)&=-\frac{2}{z^2}\mathrm{I}_{n+1}(z)+\frac{4}{z^2}\left[\mathrm{I}_n(z)-(n+1)\mathrm{I}_{n+1}(z)\right]\\&=-\frac{4n+6}{z^2}\mathrm{I}_{n+1}(z)+\frac{4}{z^2}\mathrm{I}_n(z).\end{aligned}$$

(c) Montrons par récurrence double $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists \mathrm{A}_n\in\mathbb{Z}[\mathrm{X}],\forall z\in\mathbb{C}^*,\mathrm{I}_n(z)=\dfrac{e^z\mathrm{A}_n(z)-e^{-z}\mathrm{A}_n(-z)}{z^{2n+1}}$

Initialisation — Pour $n=0$, on a vu que : $\forall z\in\mathbb{C}^*,\mathrm{I}_0(z)=\dfrac{e^z-e^{-z}}{z}$.

En posant $\mathrm{A}_0=1\in\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, on a bien $\forall z\in\mathbb{C}^*,\mathrm{I}_0(z)=\dfrac{e^z\mathrm{A}_0(z)-e^{-z}\mathrm{A}_0(-z)}{z^{2\times0+1}}$.

— Pour $n=1$, on a vu que :

$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\ \mathrm{I}_1(z)=\frac{2(e^z+e^{-z})}{z^2}-\frac{2(e^z-e^{-z})}{z^3}=\frac{(2z-2)e^z-(-2z-2)e^{-z}}{z^3}.$$

En posant $\mathrm{A}_1=2\mathrm{X}-2\in\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, on a bien $\forall z\in\mathbb{C}^*,\mathrm{I}_1(z)=\dfrac{e^z\mathrm{A}_1(z)-e^{-z}\mathrm{A}_1(-z)}{z^{2\times1+1}}$.

Hérédité Considérons un entier $n\in\mathbb{N}$ et supposons que la propriété soit vraie aux rangs n et $n+1$.

Il existe donc deux polynômes $\mathrm{A}_n,\mathrm{A}_{n+1}\in\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ tels que :

$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\begin{cases}\mathrm{I}_n(z)=\dfrac{e^z\mathrm{A}_n(z)-e^{-z}\mathrm{A}_n(-z)}{z^{2n+1}}\\[2mm]\mathrm{I}_{n+1}(z)=\dfrac{e^z\mathrm{A}_{n+1}(z)-e^{-z}\mathrm{A}_{n+1}(-z)}{z^{2(n+1)+1}}\end{cases}$$

Alors d'après la question précédente, $\forall z\in\mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n+2}(z)&=-\frac{4n+6}{z^2}\mathrm{I}_{n+1}(z)+\frac{4}{z^2}\mathrm{I}_n(z)\\&=-\frac{4n+6}{z^2}\times\frac{e^z\mathrm{A}_{n+1}(z)-e^{-z}\mathrm{A}_{n+1}(-z)}{z^{2(n+1)+1}}+\frac{4}{z^2}\times\frac{e^z\mathrm{A}_n(z)-e^{-z}\mathrm{A}_n(-z)}{z^{2n+1}}\\&=\frac{-(4n+6)\left(e^z\mathrm{A}_{n+1}(z)-e^{-z}\mathrm{A}_{n+1}(-z)\right)+4z^2\left(e^z\mathrm{A}_n(z)-e^{-z}\mathrm{A}_n(-z)\right)}{z^{2n+5}}\\&=\frac{e^z\left[-(4n+6)\mathrm{A}_{n+1}(z)+4z^2\mathrm{A}_n(z)\right]-e^{-z}\left[-(4n+6)\mathrm{A}_{n+1}(-z)+4(-z)^2\mathrm{A}_n(-z)\right]}{z^{2n+5}}\\&=\frac{e^z\mathrm{A}_{n+2}(z)-e^{-z}\mathrm{A}_{n+2}(-z)}{z^{2n+5}}\text{ en posant }\mathrm{A}_{n+2}=-(4n+6)\mathrm{A}_{n+1}+4\mathrm{X}^2\mathrm{A}_n\end{aligned}$$

Comme A_{n+1} et A_n sont des polynômes à coefficients entiers, on en déduit que A_{n+2} est encore un polynôme à coefficients entiers. La propriété est encore vraie au rang $n+2$.

(d) Les expressions de A_n pour les premiers entiers sont :

n	A_n
0	1
1	$2X-2$
2	$4X^2-12X+12$
3	$8X^3-48X^2+120X-120$
4	$16X^4-160X^3+720X^2-1680X+1680$

On peut conjecturer que le monôme dominant de A_n est 2^nX^n. Par récurrence double :

Initialisation C'est vrai pour $n=0$ et pour $n=1$.

Hérédité Supposons qu'il existe un entier $n\in\mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} A_n = 2^nX^n+\cdots \\ A_{n+1}=2^{n+1}X^{n+1}+\cdots \end{cases}$.

Alors

$$\begin{aligned} A_{n+2} &= -(4n+6)A_{n+1}+4X^2A_n \\ &= -(4n+6)(2^{n+1}X^{n+1}+\cdots)+4X^2(2^nX^n+\cdots) \\ &= -(4n+6)2^{n+1}X^{n+1}+\cdots+2^{n+2}X^{n+2}+\cdots \\ &= 2^{n+2}X^{n+2}+\cdots \end{aligned}$$

La propriété est encore vraie au rang $n+2$.

Le degré de A_n est n et son coefficient dominant est 2^n.

2. (a) Supposons que $\omega\in\mathbb{Q}(i)\setminus\{0\}$. On peut poser $\omega=r+ir'$ avec $r,r'\in\mathbb{Q}$.

$$\frac{1}{\omega}=\frac{1}{r+ir'}=\frac{r-ir'}{r^2+r'^2}=\frac{r}{r^2+r'^2}-i\frac{r'}{r^2+r'^2}$$

On remarque que comme $\omega\neq 0$, on a $\bar{\omega}\neq 0$, d'où $r^2+r'^2=\omega\bar{\omega}\neq 0$.
Or $r,r'\in\mathbb{Q}$, donc $r^2+r'^2\in\mathbb{Q}$. Le quotient de deux rationnels (avec un dénominateur non nul) étant rationnel, on a donc $\dfrac{r}{r^2+r'^2},\dfrac{-r'}{r^2+r'^2}\in\mathbb{Q}$ et donc $\dfrac{1}{\omega}\in\mathbb{Q}(i)$.

$$\omega\in\mathbb{Q}(i)\setminus\{0\}\implies\frac{1}{\omega}\in\mathbb{Q}(i).$$

(b) Montrons que $\mathbb{Z}[i]=\left\{a+bi,(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$ est stable par addition et multiplication.
Soient z,z' dans $\mathbb{Z}[i]$. Posons $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ avec $a,a',b,b'\in\mathbb{Z}$.

— Alors $z+z'=(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')\in\mathbb{Z}[i]$ car $\begin{cases} a+a'\in\mathbb{Z} \\ b+b'\in\mathbb{Z}\end{cases}$

— Et $zz'=(a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)\in\mathbb{Z}[i]$ car $\begin{cases} aa'-bb'\in\mathbb{Z} \\ ab'+a'b\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

$$z,z'\in\mathbb{Z}[i]\implies\begin{cases} z+z'\in\mathbb{Z}[i] \\ zz'\in\mathbb{Z}[i]\end{cases}$$

3. On suppose qu'il existe un $z\in\mathbb{C}^*$ tel que z et e^z soient simultanément dans $\mathbb{Q}(i)$.

(a) Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $I_n(z)=\dfrac{e^zA_n(z)-e^{-z}A_n(-z)}{z^{2n+1}}$.

Lemme : tout élément ω de $\mathbb{Q}(i)$ s'écrit sous la forme $\omega=\dfrac{R}{r}$ avec $R\in\mathbb{Z}[i]$ et $r\in\mathbb{N}^*$.

En effet, comme $\omega\in\mathbb{Q}(i)$, on peut poser $\omega=\dfrac{a}{b}+i\dfrac{a'}{b'}$ avec $a,a'\in\mathbb{Z}$ et $b,b'\in\mathbb{N}^*$.

Il suffit de mettre au même dénominateur : $\omega=\dfrac{ab'+ia'b}{bb'}=\dfrac{R}{r}$ en posant

$$\begin{cases} R=ab'+ia'b\in\mathbb{Z}[i] \\ r=bb'\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

— On a supposé que $z\in\mathbb{Q}(i)$. D'après le lemme, on peut écrire $z=\dfrac{P}{p}$ avec $P\in\mathbb{Z}[i]$ et $p\in\mathbb{N}^*$.

— On sait que le degré de A_n est n et que $A_n\in\mathbb{Z}[X]$. On peut donc poser $A_n=\displaystyle\sum_{k=0}^n a_kX^k$ avec les a_k entiers.

Par conséquent, $A_n(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^n a_k\left(\frac{P}{p}\right)^k=\frac{1}{p^n}\sum_{k=0}^n a_kP^{n-k}\alpha^k$.

Mais comme $P\in\mathbb{Z}[i]$, d'après la question 2.b., on a encore $P^k\in\mathbb{Z}[i]$ pour chaque $k\in[\![0,n]\!]$.
Donc, comme $a_kp^{n-k}\in\mathbb{Z}$, par produit, $a_kp^{n-k}P^k\in\mathbb{Z}[i]$, et par somme (toujours d'après 2.b.) $\displaystyle\sum_{k=0}^n a_kp^{n-k}P^k\in\mathbb{Z}[i]$.

On peut donc poser $A_n(z)=\dfrac{\beta_n}{p^n}$ avec $\beta_n\in\mathbb{Z}[i]$.

De même, on peut écrire $A_n(-z)=\dfrac{1}{p^n}\beta'_n$ avec $\beta'_n\in\mathbb{Z}[i]$.

— Par hypothèse, on a $e^z\in\mathbb{Q}(i)$. On a bien $e^z\neq 0$. On a vu qu'alors $e^{-z}=\dfrac{1}{e^z}\in\mathbb{Q}(i)$.

D'après le lemme, on peut écrire $e^z=\dfrac{B}{b}$ et $e^z=\dfrac{C}{c}$ avec $B,C\in\mathbb{Z}[i]$ et $b,c\in\mathbb{N}^*$.

— z étant non nul et dans $\mathbb{Q}(i)$, on a encore $\dfrac{1}{z}\in\mathbb{Q}(i)$.

D'après le lemme, on peut écrire $\dfrac{1}{z}=\dfrac{Q}{q}$ avec $Q\in\mathbb{Z}[i]$ et $q\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } I_n(z) &= \frac{1}{z^{2n+1}}(e^zA_n(z)-e^{-z}A_n(-z))=\left(\frac{Q}{q}\right)^{2n+1}\left(\frac{B}{b}\frac{\beta_n}{p^n}-\frac{C}{c}\frac{\beta'_n}{p^n}\right) \\ &= \frac{Q^{2n+1}(cB\beta_n-bC\beta'_n)}{bcp^nq^{2n+1}}. \end{aligned}$$

En posant $k=bcpq^3\in\mathbb{N}^*$, on a $k^nI_n(z)=b^{n-1}c^{n-1}q^{n-1}Q^{2n+1}(cB\beta_n-bC\beta'_n)\in\mathbb{Z}[i]$.

Il existe donc $k\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $k^nI_n(z)\in\mathbb{Z}[i]$.

(b) On a $|k^nI_n(z)|=\dfrac{k^n}{n!}\left|\displaystyle\int_{-1}^1(1-t^2)^n\,e^{tz}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\dfrac{k^n}{n!}\displaystyle\int_{-1}^1\left|(1-t^2)^n\,e^{tz}\right|\,\mathrm{d}t$.
Or, $\forall t\in[-1,1]$, $\quad\left|(1-t^2)^n\,e^{tz}\right|\leqslant\left|e^{tz}\right|=e^{\mathrm{Re}\,(tz)}=e^{t\mathrm{Re}\,(z)}$.
Par croissance de l'intégrale (avec $-1\leqslant 1$), on en déduit que

$$\int_{-1}^1\left|(1-t^2)^n\,e^{tz}\right|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{-1}^1e^{t\mathrm{Re}\,(z)}\,\mathrm{d}t.$$

On peut poser $C=\displaystyle\int_{-1}^1e^{t\mathrm{Re}\,(z)}\,\mathrm{d}t$. Cette quantité ne dépend pas de n.

On a $|k^n \mathrm{I}_n(z)| \leqslant \mathrm{C}\dfrac{k^n}{n!}$. Et comme $k^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{C}\dfrac{k^n}{n!} = 0$.
Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} k^n \mathrm{I}_n(z) = 0.$$

On peut en déduire qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \quad |k^n \mathrm{I}_n(z)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Or, on a vu dans la question précédente que $k^n \mathrm{I}_n(z) \in \mathbb{Z}[i]$, et le seul élément de $\mathbb{Z}[i]$ dans le disque de centre 0 et de rayon $\dfrac{1}{2}$ est 0.
D'où,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad k^n \mathrm{I}_n(z) = 0$$

(c) On note $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$. On choisit $\delta \in]0, 1[$ tel que $\delta|y| < \dfrac{\pi}{3}$.

i. Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $k^n \mathrm{I}_n(z) = 0$.
Comme $k^n \neq 0$ (puisque $k \neq 0$), on en déduit que $\mathrm{I}_n(z) = 0$. D'où $\mathrm{Re}\,(\mathrm{I}_n(z)) = 0$.
Or,

$$\begin{aligned}
0 = \mathrm{Re}\,(\mathrm{I}_n(z)) &= \mathrm{Re}\,\left(\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{n!}\, e^{tz}\,\mathrm{d}t\right) = \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{n!}\,\mathrm{Re}\,(e^{t(x+iy)})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{n!}\, e^{tx}\mathrm{Re}\,(e^{ity})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\, e^{tx}\cos(ty)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!}\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n [\cosh(xt) + \sinh(xt)]\cos(ty)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!}\left(\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \sinh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{n!}\int_{0}^{1} (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En effet :

— La fonction $t \mapsto (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)$ étant paire, on a :
$\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t$.

— La fonction $t \mapsto (1-t^2)^n \sinh(xt)\cos(ty)$ étant impaire, on a :
$\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t = 0$.

On conclut (en remarquant que $\dfrac{2}{n!} \neq 0$) que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \int_0^1 (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(yt)\,\mathrm{d}t = 0$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$.

— $\forall t \in [0, \delta], \quad 1 + t \geqslant 1$
Donc, en multipliant par $1 - t \geqslant 0$, on a $1 - t^2 \geqslant 1 - t \geqslant 0$.
On peut mettre ces quantités positives à la puissance n sans changer l'ordre :

$$\forall t \in [0, \delta], \quad (1-t^2)^n \geqslant (1-t)^n \geqslant 0 \quad (1)$$

— La fonction cosh prenant ses valeurs dans $[1, +\infty[$, on a :

$$\forall t \in [0, \delta], \quad \cosh(xt) \geqslant 1 \quad (2)$$

— $\forall t \in [0, \delta], \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta$. En multipliant par $|y| \geqslant 0$: $\quad 0 \leqslant t|y| \leqslant \delta|y| < \dfrac{\pi}{3}$.
Comme cos est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, on a $\cos(t|y|) \geqslant \cos\dfrac{\pi}{3}$.
La fonction cos étant paire, on en déduit :

$$\forall t \in [0, \delta], \quad \cos(ty) \geqslant \frac{1}{2} \quad (3)$$

En multipliant ces trois inégalités membre à membre (tous les membres étant positifs), on obtient :

$$\forall t \in [0, \delta], \quad (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty) \geqslant \frac{1}{2}(1-t)^n$$

Par croissance de l'intégrale, comme $0 < \delta$,

$$\int_0^\delta (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^\delta \frac{1}{2}(1-t)^n\,\mathrm{d}t$$

Or, $\displaystyle\int_0^\delta \frac{1}{2}(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^\delta = \frac{1-(1-\delta)^{n+1}}{2(n+1)}$.

$$\int_0^\delta (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1-(1-\delta)^{n+1}}{2(n+1)}$$

iii. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\displaystyle\int_\delta^1 (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_\delta^1 |(1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)|\,\mathrm{d}t$.

— $\forall t \in [\delta, 1], \quad 0 < \delta \leqslant t \leqslant 1$ donc $\delta^2 \leqslant t^2 \leqslant 1$, puis $0 \leqslant 1 - t^2 \leqslant 1 - \delta^2$, et

$$\forall t \in [\delta, 1], \quad 0 \leqslant (1-t^2)^n \leqslant (1-\delta^2)^n \quad (1)$$

— $\forall t \in [\delta, 1], \quad 0 < t \leqslant 1$ donc $0 \leqslant t|x| \leqslant |x|$.
La fonction cosh étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\forall t \in [\delta, 1], \quad \cosh(t|x|) \leqslant \cosh(|x|)$.
Cette fonction étant également paire, on a $\cosh(t|x|) = \cosh(tx)$ et $\cosh(|x|) = \cosh x$.
D'où,

$$\forall t \in [\delta, 1], \quad 0 \leqslant \cosh(tx) \leqslant \cosh x \quad (2)$$

— La fonction $|\cos|$ étant majorée par 1, on a :

$$\forall t \in [\delta, 1], \quad |\cos(yt)| \leqslant 1 \quad (3)$$

En multipliant ces trois inégalités membre à membre (tous les membres étant positifs), on obtient :

$$\forall t \in [\delta, 1], \quad |(1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)| \leqslant (1-\delta^2)^n \cosh x$$

Par croissance de l'intégrale, comme $\delta < 1$,

$$\int_\delta^1 |(1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_\delta^1 (1-\delta^2)^n \cosh x\,\mathrm{d}t$$

Or,
$$\begin{aligned}
\int_\delta^1 (1-\delta^2)^n \cosh x\,\mathrm{d}t &= (1-\delta^2)^n \cosh x \int_\delta^1 \mathrm{d}t \\
&= (1-\delta^2)^n (\cosh x)(1-\delta) \leqslant (1-\delta^2)^n \cosh x.
\end{aligned}$$

$$\left|\int_\delta^1 (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (1-\delta^2)^n \cosh x$$

(d) On a vu que $\forall n \geqslant n_0,\quad \int_0^1 (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(yt)\,\mathrm{d}t = 0$.
D'après la relation de Chasles

$$\forall n \geqslant n_0,\quad \int_0^\delta (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t + \int_\delta^1 (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Donc $\forall n \geqslant n_0, \int_0^\delta (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t = -\int_\delta^1 (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t$.
En prenant la valeur absolue :

$$\forall n \geqslant n_0,\quad \int_0^\delta (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t = \left|\int_\delta^1 (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Or,

— d'après 3.*c.ii.*, on a $\forall n \geqslant n_0,\quad \int_0^\delta (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t \geqslant \dfrac{1-(1-\delta)^{n+1}}{2(n+1)}$,

— d'après 3.*c.iii.*, on a $\forall n \in \mathbb{N},\quad \left|\int_\delta^1 (1-t^2)^n \cosh(xt)\cos(ty)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (1-\delta^2)^n \cosh x$.

On en déduit que $\forall n \geqslant n_0,\quad \dfrac{1-(1-\delta)^{n+1}}{2(n+1)} \leqslant (1-\delta^2)^n \cosh x$.
D'où $\forall n \geqslant n_0,\quad 1-(1-\delta)^{n+1} \leqslant 2(n+1)(1-\delta^2)^n \cosh x$.
Or

— $1-\delta \in]0,1[$, donc $1-(1-\delta)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

— $1-\delta^2 \in]0,1[$, donc $(1-\delta^2)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par croissances comparées, $2(n+1)(1-\delta^2)^n \cosh x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on aboutit à $1 \leqslant 0$. C'est absurde !
On en déduit le théorème :

Il n'existe aucun complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que z et e^z soient simultanément dans $\mathbb{Q}(i)$.

4. (a) Supposons que π soit rationnel. Alors, on aurait $i\pi \in \mathbb{Q}(i)$. Ce nombre étant non nul, d'après le théorème précédent, on aurait $e^{i\pi} \notin \mathbb{Q}(i)$. Or $e^{i\pi} = -1$. C'est absurde !
D'où π est irrationnel.

(b) Comme 1 est non nul et rationnel, on en déduit que ***e* est irrationnel**.
De même, $\boldsymbol{e^2}$ **est irrationnel**.
On peut généraliser à

$$\forall r \in \mathbb{Q}^*,\quad e^r \notin \mathbb{Q}$$

(c) Comme $e^{\ln 2} = 2$ est rationnel et que $\ln 2 \neq 0$, on en déduit que $\mathbf{\ln 2}$ **est irrationnel**.
De même, $\mathbf{\ln 3}$ **est irrationnel**.
On peut généraliser à

$$\forall r \in \mathbb{Q}_+^*,\quad \ln r \notin \mathbb{Q}$$