Dénombrements

Exercice 1 :

1 Nombre de résultats en tout :

$$10^5 \text{ résultats en tout.}$$

2 Les cinq boules sont toutes de la même couleur :

- 5 boules jaunes : 1^5 possibilité.
- 5 boules bleues : 2^5 possibilités.
- 5 boules rouges : 3^5 possibilités.
- 5 boules vertes : 4^5 possibilités.

En tout :

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 = 1\ 300 \text{ résultats monochromes.}$$

3 les quatre couleurs apparaissent parmi les cinq boules :

Il y a donc deux boules de la même couleur et une boule de chaque autre couleur. On discute selon la couleur représentée en double.

- 2 boules jaunes :
  - 1^2 choix de boules jaunes (deux fois la boule 1) ;
  - $\binom{5}{2}$ manières de placer des deux boules jaunes ;
  - $\binom{2}{1}$ choix de la boule bleue ;
  - $\binom{3}{1}$ choix de la boule rouge ;
  - $\binom{4}{1}$ choix de la boule verte ;
  - 3! manière de placer ces trois boules.

  Bilan : $1^2 \times \binom{5}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}3! = 10 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 = 1440$ possibilités avec deux boules jaunes.
- 2 boules bleues : $2^2 \times \binom{5}{2}\binom{1}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}3! = 2880$ possibilités.
- 2 boules rouges : $3^2 \times \binom{5}{2}\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}3! = 4320$ possibilités.
- 2 boules vertes : $4^2 \times \binom{5}{2}\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}3! = 5760$ possibilités.

Donc, 14 400 résultats polychromes.

4 La boule numéro 8 a été tirée et exactement deux des boules tirées sont rouges.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

La boule 8 n'est pas rouge.
Elle doit être tirée, et apparaît donc $1, 2$ ou 3 fois.

Si on tire la boule 8 exactement 3 fois :

- $\binom{5}{3}$ manières de placer la boule 8 ;
- 3 choix de la boule rouge pour le premier emplacement libre ;
- 3 choix de la boule rouge pour le deuxième emplacement libre.

$$\binom{5}{3} \times 3^2 = 10 \times 9 = 90 \text{ possibilités.}$$

Si on tire la boule 8 exactement 2 fois :

- $\binom{5}{2}$ manières de placer la boule 8 ;
- $\binom{3}{2}$ manières de placer les boules rouges ;
- 3^2 choix des boules rouges.
- 6 choix de la dernière boule ni 8 ni rouge.

$$\binom{5}{2}\binom{3}{2} \times 3^2 \times 6 = 10 \times 3 \times 9 \times 6 = 1\ 620 \text{ possibilités.}$$

Si on tire la boule 8 exactement 1 fois :

- $\binom{5}{1}$ manières de placer la boule 8 ;
- $\binom{4}{2}$ manières de placer les boules rouges ;
- 3^2 choix des boules rouges.
- 6 choix de la première boule ni 8 ni rouge (1ère place).
- 6 choix de la deuxième boule ni 8 ni rouge (2ème place).

$$\binom{5}{1}\binom{4}{2} \times 3^2 \times 6^2 = 5 \times 6 \times 9 \times 6^2 = 9\ 720 \text{ possibilités.}$$

Bilan :

- 3 fois la boule 8 : 90 possibilités.
- 2 fois la boule 8 : 1 620 possibilités.
- 1 fois la boule 8 : 9 720 possibilités.

Donc, 11 430 résultats avec 2 boules rouges et la boule 8 tirée.

Exercice 2 :

Partie A

1. En convenant de noter D un déplacement vers la droite et H un déplacement vers le haut, un tel chemin peut être décrit par un mot de $n+p$ lettres comportant n fois la lettre D (et p fois la lettre H).

$$\text{Donc } \binom{n+p}{n} \text{ chemins croissants de } (0,0) \text{ à } (n,p).$$

2. Si $n > p+1$, c'est impossible.
Si $n \leqslant p+1$, deux méthodes pour compter ces chemins strictement croissants :
   - Deux D ne peuvent pas être consécutifs. Un D est nécessairement suivi d'un H, sauf s'il est en dernière position.
     1. Si le mot ne se termine pas par D, chaque D est suivi d'un H. On a donc n groupes de deux lettres DH. Il reste $p-n$ lettres H à placer. On doit écrire un mot constitué de $p-n$ lettres H et n blocs de DH. C'est au final un mot de p emplacements, et il reste à choisir l'endroit où on met les blocs : $\binom{p}{n}$ possibilités.
     2. Si le mot se termine par D, idem, sauf qu'il y a $n-1$ blocs DH. Il reste $p-(n-1)$ lettres H à placer, soit un mot de p emplacements à nouveau (sans compter le dernier D). $\binom{p}{n-1}$ possibilités.

     $$\text{Au total, on a : } \binom{p}{n} + \binom{p}{n-1} = \binom{p+1}{n} \text{ chemins strictement croissants.}$$
   - On peut commencer par placer les p lettres H. Comme deux D ne peuvent être consécutifs, ils doivent être placés entre ces H, ou avant ou après. $p+1$ emplacements au final.

$$\text{On retrouve les : } \binom{p+1}{n} \text{ chemins strictement croissants.}$$

Partie B

1. Modélisation : chaque distribution est modélisée par un ensemble de 7 éléments : les numéros des boîtes où ont été déposés les prospectus. Par exemple, $\{1,2,3,4,7,8,10\}$ signifie que les prospectus ont été distribués dans les boîtes $1,2,3,4,7,8,10$. Il s'agit d'une combinaison de 7 éléments pris parmi 10.

$$\binom{10}{7} = 120 \text{ façons.}$$

2. Modélisation : les prospectus étant distincts, il faut mémoriser où on a distribué le premier prospectus, le deuxième... On utilise cette fois une 7-liste. Par exemple, $(3,7,2,4,1,10,8)$ signifie que le premier prospectus a été distribué dans la boîte 3, le deuxième dans la boîte 7, etc. Comme chaque boîte ne peut recevoir plus d'un prospectus, les éléments de la liste (pris dans $[\![1,10]\!]$) sont distincts. Il s'agit d'un arrangement de 7 éléments pris parmi 10.

$$\mathrm{A}_{10}^{7} = 604\ 800 \text{ façons.}$$

3. Modélisation : on compte cette fois le nombre x_k de prospectus déposés dans la boite k. La distribution est alors décrite par le 10-uplet d'entiers $(x_1, x_2, \cdots, x_{10})$ respectant $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 7$.

$$\binom{9+7}{7} = 11\ 440 \text{ façons.}$$

4. Modélisation : on utilise encore une fois une 7-liste. Par exemple, $(3,7,3,3,1,10,8)$ signifie que le premier prospectus a été distribué dans la boîte 3, le deuxième dans la boîte 7, etc. Mais cette fois, une même boite peut figurer plusieurs fois. L'ensemble des possibilités est donc $[\![1,10]\!]^7$.

$$10^7 \text{ façons.}$$