Variables aléatoires

Exercice 1 : Une puce se déplace sur la bande rectangulaire suivante :

0	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$

Initialement la puce est sur la case n°0. Elle se déplace de 1 ou 2 cases vers la droite au hasard à chaque saut. On note $\mathbb{X}_n$ la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de $\mathbb{X}_1$ et calculer $\mathrm{E}(\mathbb{X}_1)$ et $\mathrm{V}(\mathbb{X}_1)$.
2. On note $\mathbb{Y}_n$ la v.a. égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de $\mathbb{Y}_n$ et calculer $\mathrm{E}(\mathbb{Y}_n)$ et $\mathrm{V}(\mathbb{Y}_n)$.
3. Déterminer $\mathbb{X}_n$ en fonction de $\mathbb{Y}_n$ et en déduire la loi de $\mathbb{X}_n$, puis $\mathrm{E}(\mathbb{X}_n)$ ainsi que $\mathrm{V}(\mathbb{X}_n)$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et

1. $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$
2. $\mathbb{Y} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, \mathbb{X}]\!])$
3. $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, \mathbb{Y}]\!])$

Déterminer les lois de $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Z}$ ainsi que leur espérance.

Exercice 3 : On étudie dans ce problème un cas concret afin de minimiser le coût de dépistage d'une maladie. La méthode a systématiquement été utilisée par l'armée américaine pendant la Seconde Guerre Mondiale.

Le but est de comparer l'efficacité, par rapport au coût, de deux méthodes de dépistage d'une maladie concernant statistiquement 1% de la population, sur un ensemble de 1000 personnes. On considère que les résultats des tests individuels constituent des événements indépendants.

Dans la méthode A, on effectue 1000 analyses individuelles (méthode exhaustive). Dans la méthode B, on répartit les 1000 personnes en n groupes de r personnes. Dans chaque groupe, on mélange les r prélèvements pour en faire une seule analyse, ce qui conduit à une première série de n analyses. Un groupe est négatif lorsqu'aucun des individus qui le composent n'est malade. Sinon, le groupe est positif et l'on procède alors à une nouvelle analyse de sang de chacune des r personnes de ce groupe.

1. **Étude de la méthode B**
   1. Quelle est la probabilité p qu'il soit positif.
   2. Soit $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire égale au nombre de groupes positifs.
      Justifier que $\mathbb{Y} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. En déduire l'espérance de $\mathbb{Y}$.
   3. Si $\mathbb{Y}$ désigne le nombre de groupes positifs, calculer le nombre d'analyses faites au total avec la méthode B. $\mathbb{X}$ désignant la variable aléatoire égale au nombre d'analyses effectuées avec la méthode B, calculer l'espérance de $\mathbb{X}$.
2. **Comparaison des méthodes A et B**
   1. En remplaçant $0,99^r$ par sa valeur approchée : $\left(1 - \dfrac{1}{100}\right)^r \simeq 1 - \dfrac{r}{100}$, montrer que $\mathrm{E}(\mathbb{X}) \simeq 10\left(r + \dfrac{100}{r}\right)$
   2. En déduire les valeurs de r pour lesquelles la méthode B est moins coûteuse que la méthode A, ainsi que la valeur de r minimisant le coût de la méthode B.