# Extrait de CAPES 2021

...and now the sequel

## Problème 1 : Partie C: les lois géométriques

12. Soit $p$ un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$. Démontrer qu'on définit une loi de probabilité sur l'univers $\mathbb{N}^*$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k = p(1-p)^{k-1}.$$

***Notations et vocabulaire***

- *On dit qu'une variable aléatoire définie sur un univers $\Omega$ suit la loi géométrique de paramètre $p$ si $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$,*

$$\mathrm{P}(\mathbb{X} = k) = p_k.$$

*On note alors $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.*

- *On dit qu'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ telle que $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ admet une espérance finie, noté $\mathrm{E}(\mathbb{X})$, si la série de terme général $k\mathrm{P}(\mathbb{X} = k)$ est absolument convergente et on écrit alors:*

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathbb{X} = k).$$

- *Lorsque $\mathbb{X}^2$ admet une espérance finie, on appelle variance de $\mathbb{X}$, notée $\mathrm{V}(\mathbb{X})$, le réel*

$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}\big((\mathbb{X} - \mathrm{E}(\mathbb{X}))^2\big) = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) - \mathrm{E}(\mathbb{X})^2.$$

13. Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Démontrer que $\mathbb{X}$ admet une espérance, notée $\mathrm{E}(\mathbb{X})$, et une variance, notée $\mathrm{V}(\mathbb{X})$, vérifiant:

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathbb{X}) = \frac{1-p}{p^2}.$$

14. Soient $\mathbb{X}_1,\dots,\ \mathbb{X}_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{X}_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p_i)$ , où $p_i \in\ ]0\,;1[$.

(a) Donner l'espérance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$ en fonction des $p_i$.

(b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}.$$

## Partie D: inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

15. **Inégalité de Markov**
Soit $\mathbb{Y}$ une variable aléatoire positive définie sur un univers $\Omega$, possédant une espérance notée $\mathrm{E}(\mathbb{Y})$.
Démontrer que, pour tout nombre réel $a$ strictement positif,

$$\mathrm{P}(\mathbb{Y} \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\mathbb{Y})}{a}.$$

**Aide:** On pourra décomposer $\mathbb{Y}(\Omega)$ sous la forme $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{Y}_1 \cup \mathbb{Y}_2$, avec $\mathbb{Y}_1 = \{y \in \mathbb{Y}(\Omega), y \geqslant a\}$ et $\mathbb{Y}_2 = \{y \in \mathbb{Y}(\Omega), y < a\}$.

16. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire définie sur un univers $\Omega$ possédant une espérance notée $\mathrm{E}(\mathbb{X})$ et une variance notée $\mathrm{V}(\mathbb{X})$.
Démontrer que, pour tout nombre réel $a$ strictement positif,

$$\mathrm{P}(|\mathbb{X}-\mathrm{E}(\mathbb{X})| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{V}(\mathbb{X})}{a^2}.$$

**Partie E:** le problème du collectionneur

Dans cette partie, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un fabriquant de tablettes de chocolat propose à ses acheteurs de collectionner des vignettes. Chaque tablette contient une vignette qui représente un animal que l'on découvre à l'ouverture de la tablette. Le nombre d'animaux différents représentés sur les vignettes est égal à $n$ et on suppose que ces animaux sont répartis de façon équiprobable entre les tablettes.

Un collectionneur achète des tablettes jusqu'à obtenir l'ensemble de la collection, c'est-à-dire pour chacun des $n$ animaux au moins une vignette le représentant.

Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. On note $\mathbb{T}_k$ la variable aléatoire égale au nombre d'achats effectués par le collectionneur au moment où sa collection comporte pour la première fois $k$ animaux différents, éventuellement avec des doublons.

17. En utilisant les notations précédentes, désigner la variable aléatoire qui modélise le nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection.
18. Déterminer la loi de $\mathbb{T}_1$.
19. (a) On suppose que $q$ est un entier supérieur ou égal à 2.
Calculer la probabilité qu'un collectionneur obtienne toujours le même animal au cours de ses $q$ premiers achats.
(b) En déduire, pour tout $q \geqslant 1$,
$$\mathrm{P}(\mathbb{T}_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}.$$
(c) En déduire la loi de $\mathbb{T}_2$ *i.e.* $\forall\, q \geqslant 2$, $\mathrm{P}(\mathbb{T}_2 = q)$.
(d) On suppose que la collection contient 100 animaux.
Calculer le nombre minimal d'achats que le collectionneur doit effectuer pour que la probabilité d'obtenir deux animaux différents soit supérieur ou égale à $0,99$.

On note $\mathbb{Z}_k$ le nombre d'achats effectués par le collectionneur entre le moment où sa collection comporte pour la première fois $k-1$ animaux différents et le moment où sa collection comporte pour la première fois $k$ animaux différents.

20. Pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$, justifier que
$$\mathbb{Z}_k = \begin{cases} \mathbb{T}_1 & \text{si } k=1 \\ \mathbb{T}_k - \mathbb{T}_{k-1} & \text{et } k \geqslant 2. \end{cases}$$
21. En déduire, pour $k \geqslant 2$, une expression de $\mathbb{T}_k$ en fonction des $\mathbb{Z}_i$ ou $i \in [\![1\,;n]\!]$.
22. Démontrer que $\mathbb{Z}_k$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
En déduire l'espérance et la variance de $\mathbb{Z}_k$.
23. En déduire que $\mathrm{E}(\mathbb{T}_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = n\mathrm{H}_n$.
24. Donner un équivalent de $\mathrm{E}(\mathbb{T}_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

25. On admet que les variables aléatoires $\mathbb{Z}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes.
    (a) Exprimer $\mathrm{V}(\mathbb{T}_n)$ en fonction de $n$, $\mathrm{B}_n$ et $\mathrm{H}_n$.
    (b) En déduire que $\mathrm{V}(\mathbb{T}_n) \leqslant \dfrac{n^2\pi^2}{6}$.
26. Démontrer que, pour tout nombre réel $\lambda > 0$,

$$\mathrm{P}\big(\,|\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n)| \geqslant \lambda n \ln n\big) \leqslant \frac{\pi^2}{6\lambda^2(\ln n)^2}.$$

27. Déterminer un entier $n_0$ tel que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à $n_0$,

$$\mathrm{P}\big(\mathbb{T}_n \geqslant n\mathrm{H}_n + n \ln n\big) \leqslant 0,01.$$