Extrait de CAPES 2021

Problème 1 : **Partie C:** les lois géométriques

12. Comme $p \in]0\,;1[$, il est clair que $p_k = p(1-p)^{k-1} \in [0\,;1]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Comme $p \in]0\,;1[$ alors $1-p \in]-1\,;1[$ et la suite géométrique de terme $(1-p)^{k-1}$ est donc convergente est on a:
$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = p\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = p \times \frac{1}{p} = 1.$$
On a bien défini une loi de probabilité sur l'univers $\mathbb{N}^*$.

13. Comme $p \in]0\,;1[$ alors $1-p \in]0\,;1[$. D'après le résultat de la question 11, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p^2}$.
La variable $\mathbb{X}$ admet donc une espérance égale à $\mathrm{E}(\mathbb{X}) = p \times \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{p}$.
Par définition, $\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}((\mathbb{X}-\mathrm{E}(\mathbb{X}))^2)$. On s'intéresse alors à l'espérance de la variable aléatoire $\mathbb{X}^2 - \dfrac{2}{p}\mathbb{X} + \dfrac{1}{p^2}$.
La question revient à prouver que $\mathbb{X}^2$ admet une espérance finie.
D'après le théorème de transfert, cela revient à prouver la convergence de la série de terme $k^2 p_k = k^2 p(1-p)^k$.
Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, posons $x = 1-p \in]0\,;1[$.
$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k^2x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k(k+1)x^{k-1} - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} kx^{k-1} = \sum_{k=2}^{\mathrm{N}+1}(k-1)kx^{k-2} - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} kx^{k-1}.$$
D'après les résultats de la question 11, les deux séries convergent et on a:
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} k^2x^{k-1} &= \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}\\ &= \frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{2-p}{p^3}.\end{aligned}$$
Donc, $\mathrm{E}(\mathbb{X}^2) = \dfrac{2-p}{p^2} < +\infty$.
Par linéarité de l'espérance, on a alors:
$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}((\mathbb{X}-\mathrm{E}(\mathbb{X}))^2) &= \mathrm{E}\left(\mathbb{X}^2 - \frac{2}{p}\mathbb{X} + \frac{1}{p^2}\right)\\ &= \mathrm{E}\left(\mathbb{X}^2\right) - \frac{2}{p}\mathrm{E}(\mathbb{X}) + \frac{1}{p^2}\\ &= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.\end{aligned}$$
Donc, $\mathbb{X}$ admet également une variance et l'on a:
$$\mathrm{V}(\mathbb{X}) = \frac{1-p}{p^2}.$$

14. (a) Par linéarité de l'espérance sur la somme finie des $\mathbb{X}_i$, on a:
$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}.$$

(b) Les variables $\mathbb{X}_i$ étant mutuellement indépendantes, on a:

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}\left(\mathbb{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-p_1}{p_1^2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}.$$

Les sommes étant finies, il n'y a pas lieu de se poser des questions de convergence. Seule la linéarité de la somme intervient.

Partie D: Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

15. **Inégalité de Markov:** *cf.* cours.
16. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev:** *cf.* cours.

Partie E: le problème du collectionneur

17. D'après l'énoncé, il y a n vignettes différentes. La variable aléatoire qui modélise le nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection est $\mathbb{T}_n$.
18. Le support de la variable aléatoire $\mathbb{T}_1$ ne comporte qu'un élément 1 qui correspond à l'unique image qu'il aura après une seule tablette et on a $\mathrm{P}(\mathbb{T}_1 = 1) = 1$.
Donc,

$\mathbb{T}_1$	1
$\mathrm{P}(\mathbb{T}_1 = t)$	1

19. (a) Les animaux étant répartis de manière équiprobables, la probabilité qu'un collectionneur obtienne toujours le même animal au cours de ses q premiers achats est donc égale à $\dfrac{1}{n^{q-1}}$.
(b) L'événement $(\mathbb{T}_2 > q)$ signifie que la première fois que le collectionneur a obtenu deux animaux différents s'est produite après strictement plus de q achats. Événement identique à celui de toujours obtenir le même animal au cours des q premiers achats soit:
$$\mathrm{P}(\mathbb{T}_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}.$$
(c) $\forall\, q \geqslant 2$, $\mathrm{P}(\mathbb{T}_2 = q) = \mathrm{P}(\mathbb{T}_2 > q-1) - \mathrm{P}(\mathbb{T}_2 > q) = \dfrac{1}{n^{q-2}} - \dfrac{1}{n^{q-1}} = \dfrac{n-1}{n^{q-1}}$.
(d) La question revient à chercher $q \geqslant 2$ tel que:
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathbb{T}_2 = q) \geqslant 0,99 &\iff \frac{99}{100^{q-1}} \geqslant 0,99 \iff 100^{q-1} \leqslant 100\\ &\iff 100^{q-2} \leqslant 1 \iff q \leqslant 2.\end{aligned}$$
Le nombre minimal est donc 2.
20. Ôté le cas dégénéré $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{T}_1$, par définition de $\mathbb{Z}_k$, on a $\mathbb{Z}_k = \mathbb{T}_k - \mathbb{T}_{k-1}$ si $k > 1$.
21. Par télescopage, on a:
$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{Z}_k = \mathbb{T}_1 + \sum_{k=2}^{n}(\mathbb{T}_k - \mathbb{T}_{k-1}) = \mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_n - \mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_n.$$
Donc, $\forall\, k \geqslant 2$, $\mathbb{T}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{Z}_k$.
22. Lorsque le collectionneur à $k-1$ animaux différents, la probabilité qu'il en obtienne un différent est de $\dfrac{n-k+1}{n} = 1 - \dfrac{k-1}{n}$, celle d'en obtenir un qu'il a déjà de $\dfrac{k-1}{n}$.

Ainsi, pour qu'il en obtienne 1 différent au bout de q achats, il faut et il suffit qu'il échoue à cela $q-1$ fois avec la probabilité $\left(\frac{k-1}{n}\right)^{q-1}$ et qu'il réussisse à la q-ième tentative avec la probabilité $\frac{n-k+1}{n} = 1 - \frac{k-1}{n}$.
On obtient donc, $\mathrm{P}(\mathbb{Z}_k = q) = \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \times \left(\frac{k-1}{n}\right)^{q-1} = p(1-p)^{q-1}$ avec $p = 1 - \frac{k-1}{n} \in]0\,;1[$ car $2 \leqslant k \leqslant n$.
La variable $\mathbb{Z}_k$ suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - \frac{k-1}{n} = \frac{n-k+1}{n}$.
D'après la question 13, on a alors:

$$\mathrm{E}(\mathbb{Z}_k) = \frac{1}{p} = \frac{n}{n-k+1}.$$

$$\mathrm{V}(\mathbb{Z}_k) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{k-1}{n}}{\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2} = \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}.$$

23. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que:

$$\mathrm{E}(\mathbb{T}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\mathbb{Z}_k) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} \underset{l=n-k+1}{=} n \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} = n\mathrm{H}_n.$$

24. D'après 3.b, on obtient alors:

$$\mathrm{E}(\mathbb{T}_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

25. On admet que les variables aléatoires $\mathbb{Z}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes.
   (a) Comme les variables aléatoires $\mathbb{Z}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathbb{T}_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(\mathbb{Z}_k) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(n-k+1)^2} \underset{l=n-k+1}{=} n \sum_{k=1}^{n} \frac{n-l}{l^2} \\ &= n^2\mathrm{B}_n - n\mathrm{H}_n.\end{aligned}$$

   (b) Comme, $n\mathrm{H}_n > 0$, $\mathrm{V}(\mathbb{T}_n) \leqslant n^2\mathrm{B}_n$.
   La suite $(n^2\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, produit d'une suite croissante et d'une série à termes positifs est croissante vers sa limite $\frac{n^2\pi^2}{6}$ donc

$$\mathrm{V}(\mathbb{T}_n) \leqslant \frac{n^2\pi^2}{6}.$$

26. Pour $n \geqslant 2$, $a = \lambda n \ln n > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a alors:

$$\mathrm{P}\big(|\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n)| \geqslant \lambda n \ln n\big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(\mathbb{T}_n)}{\lambda^2 n^2 (\ln n)^2} \leqslant \frac{n^2\pi^2}{6\lambda^2 n^2 (\ln n)^2} = \frac{\pi^2}{6\lambda^2 (\ln n)^2}.$$

27. Par symétrie autour de $\mathrm{E}(\mathbb{T}_n)$, pour tout $\lambda > 0$, on a:

$$\mathrm{P}\big(|\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n)| \geqslant \lambda n \ln n\big) = 2\mathrm{P}\big(\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n) \geqslant \lambda n \ln n\big).$$

Il suffit alors d'appliquer la majoration de la question précédente pour D'où, avec $\lambda = 1$ et $\mathrm{E}(\mathbb{T}_n) = n\mathrm{H}_n$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\big(\mathbb{T}_n \geqslant n\mathrm{H}_n + n\ln n\big) \leqslant 0,01 &\iff \mathrm{P}\big(\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n) \geqslant n\ln n\big) \leqslant 0,01\\
&\iff \mathrm{P}\big(\,|\mathbb{T}_n - \mathrm{E}(\mathbb{T}_n)| \geqslant n\ln n\big) \leqslant 0,02\\
&\iff \frac{\pi^2}{6(\ln n)^2} \leqslant 0,02\\
&\iff n \geqslant e^{\frac{\sqrt{50}\pi}{\sqrt{6}}} = e^{\frac{5\pi}{\sqrt{3}}}\\
&\iff n \geqslant 8681,9.
\end{aligned}$$

Donc $n_0 = 8682$. Ça fait beaucoup de chocolat.