Variables aléatoires

Exercice 1 :

1. La loi de probabilité de $\mathbb{X}_1$ est donnée par :

x	1	2
$P(\mathbb{X}_1 = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\implies \mathbb{X}_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket)$.

On en déduit $E(\mathbb{X}_1) = \frac{3}{2}$ et $V(\mathbb{X}_1) = \frac{1}{4}$.

2. La puce saute d'une ou deux cases à chaque saut ; considérons le saut d'une case comme un succès et celui de deux cases comme un échec. On reconnaît alors une épreuve de Bernoulli, avec une probabilité de succès égale à $\frac{1}{2}$.
On considère que chaque saut est indépendant des autres, si bien que le nombre de succès $\mathbb{Y}_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

La loi de $\mathbb{Y}_n$ est donnée par $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(\mathbb{Y}_n = k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$.

On a $E(\mathbb{Y}_n) = \frac{n}{2}$ et $V(\mathbb{Y}_n) = \frac{n}{4}$.

3. On a $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \mathbb{X}_n = 1\mathbb{Y}_n + 2(n - \mathbb{Y}_n)$.
Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \mathbb{X}_n = 2n - \mathbb{Y}_n$$

Le support de $\mathbb{X}_n$ est $\llbracket n, 2n \rrbracket$.

$$\forall p \in \llbracket n, 2n \rrbracket, \quad P(\mathbb{X}_n = p) = P(2n - \mathbb{Y}_n = p) = P(\mathbb{Y}_n = 2n - p)$$

La loi de $\mathbb{X}_n$ est donnée par :

$$\forall p \in \llbracket n, 2n \rrbracket, \quad P(\mathbb{X}_n = p) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{2n-p}.$$

$E(\mathbb{X}_n) = E(2n - \mathbb{Y}_n) = 2n - E(\mathbb{Y}_n)$ donc $E(\mathbb{Y}_n) = \frac{3n}{2}$.

$V(\mathbb{X}_n) = V(2n - \mathbb{Y}_n) = V(\mathbb{Y}_n)$ donc $V(\mathbb{X}_n) = \frac{3n}{2}$.

Exercice 2 :

1. D'après le cours $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket) \implies E(\mathbb{X}) = \frac{n+1}{2}$.

2. Cherchons la loi de $\mathbb{Y}$:
Soit $k \in \llbracket 1\,;n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathbb{Y} = k) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n}\Big((\mathbb{X} = i) \cap (\mathbb{Y} = k)\Big)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\Big((\mathbb{X} = i) \cap (\mathbb{Y} = k)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{X} = i) \times \mathbb{P}_{(\mathbb{X}_i = i)}(\mathbb{Y} = k) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{Y}) &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(\mathbb{Y} = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n}\frac{k}{i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2} \\
&= \frac{n+3}{4}.
\end{aligned}$$

Remarque : On peut remarquer que $E(\mathbb{Y}) = \frac{1 + E(\mathbb{X})}{2}$.

3. Le raisonnement est identique.
Soit $k \in \llbracket 1\,;n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathbb{Z} = k) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k \leqslant j \leqslant i \leqslant n}\Big((\mathbb{X} = i) \cap (\mathbb{Y} = j) \cap (\mathbb{Z} = k)\Big)\right) \\
&= \sum_{k \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \mathbb{P}\Big((\mathbb{X} = i) \cap (\mathbb{Y} = j) \cap (\mathbb{Z} = k)\Big) \\
&= \sum_{k \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \mathbb{P}(\mathbb{X} = i) \times \mathbb{P}_{(\mathbb{X}_i = i)}(\mathbb{Y} = j) \times \mathbb{P}_{(\mathbb{X}_i = i) \cap (\mathbb{Y} = j)}(\mathbb{Z} = k) \\
&= \sum_{j=k}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{n} \times \frac{1}{i} \times \frac{1}{j} = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n}\sum_{i=j}^{n} \times \frac{1}{ij}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{Z}) &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(\mathbb{Z} = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{j=k}^{n}\sum_{i=j}^{n} \times \frac{1}{ij} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{1 \leqslant k \leqslant j \leqslant i \leqslant n}\frac{k}{ij} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} k \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\frac{j+1}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+3}{4} \\
&= \frac{n+7}{8}.
\end{aligned}$$

Remarque : On peut remarquer que $E(\mathbb{Z}) = \frac{1 + E(\mathbb{Y})}{2}$.

Exercice 3 :

1 ① Le groupe est négatif si chaque personne est saine : probabilité $\left(\dfrac{99}{100}\right)^r$.

La probabilité que le groupe soit positif est donc :

$$p = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^r.$$

② On suppose que le résultat de chaque groupe n'influe pas sur le résultat des autres (pas de contagion, par exemple). Chaque groupe ayant la même probabilité p d'être positif, négatif étant la seule autre possibilité, le nombre de groupe positifs suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Donc

$$\mathrm{E}(\mathbb{Y}) = np.$$

③ Le nombre d'analyse de groupe est n. Comme $\mathbb{Y}$ groupes sont positifs, on doit ajouter $r\mathbb{Y}$ analyses individuelles.

On a donc

$$\mathbb{X} = n + r\mathbb{Y}.$$

D'après les propriétés de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathbb{X}) &= \mathrm{E}(n + r\mathbb{Y}) = n + r\mathrm{E}(\mathbb{Y}) = n + rnp \\ &= n(1 + rp).\end{aligned}$$

2 ① $p = 1 - 0,99^r = 1 - (1 - 0,01)^r \simeq 1 - (1 - 0,01r) = \dfrac{r}{100}$.

On a reparti les 1000 personnes en n groupes de r, donc $nr = 1000$ et $n = \dfrac{1000}{r}$.

D'où,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathbb{X}) = n(1 + rp) &\simeq n\left(1 + r\frac{r}{100}\right) \\ &= \frac{1000}{r}\left(1 + \frac{r^2}{100}\right) \simeq \frac{1000}{r} + 10r \\ &\simeq 10\left(r + \frac{100}{r}\right).\end{aligned}$$

② La méthode A demande systématiquement 1000 analyses.

La méthode B est moins couteuse que la méthode A dès que $10\left(r + \dfrac{100}{r}\right) \leqslant 1000$.

On peut vérifier que c'est le cas dès que $r \in [\![2\,;500]\!]$ *i.e.* toujours.

Personne n'aurait pensé à faire 1 groupe de 1000 ou 1000 groupes de 1 !

Une rapide étude de la fonction $r \longmapsto 10\left(r + \dfrac{100}{r}\right)$ montre qu'elle atteint son minimum pour $r = 10$ et qu'il vaut alors 200.

En faisant 10 groupes de 100 personnes, on devra réaliser en moyenne 200 analyses. On a divisé le coût par 5 par rapport à la méthode exhaustive.