Extrait de CAPES 2021

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

L'emploi d'une calculatrice est interdit.

Durée: 4 heures

Problème 1 : Dans tout ce problème, E désigne un espace vectoriel réel de dimension n avec $n \geqslant 2$.

Si v désigne un endomorphisme de E, pour tout entier naturel k, on note v^k l'endomorphisme défini par récurrence par $v^0 = \mathrm{I}d$ et $v^{k+1} = v^k \circ v$.

Les parties A et B (et C en très grande partie) sont indépendantes.

PARTIE A

Dans cette partie, on suppose que $n = 2$, et on considère un endomorphisme f vérifiant $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1. Soit x un vecteur de E tel que $f(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\big((x, f(x)\big)$ est une base de E.
2. En déduire la matrice de f dans cette base.

PARTIE B

Dans cette partie on suppose que $n = 4$ et on cherche à résoudre l'équation $u^2 = -\mathrm{I}d$, où u est un endomorphisme de E.

Soit f une solution de cette équation.

3. Montrer qu'il n'existe pas de réel λ tel que l'équation $f(x) = \lambda x$ d'inconnue $x \in \mathrm{E}$, admette une solution non nulle.
4. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer que la famille $\big((x, f(x)\big)$ est libre.
5. On note F le sous-espace engendré par cette famille. Quelle est la dimension de F?
6. On note G un supplémentaire de F dans E. Soit y un vecteur non nul de G. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \big((x, f(x), y, f(y)\big)$ est une base de E.
7. Écrire la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}'$.

PARTIE C

Dans cette partie E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.

On définit sur E l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe $f(\mathrm{P})$ défini par:

$$f(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = (1 + \mathrm{X}^2)\mathrm{P}''(\mathrm{X}) - 2\mathrm{X}\mathrm{P}'(\mathrm{X}).$$

8. Montrer que f est un endomorphisme de E.

9. (a) Écrire la matrice de f dans la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)$ de E.
   (b) Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\ker(f + 2\mathrm{I}d)$.
   On notera $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ les quatre polynômes ainsi obtenus.
   (c) Montrer que la famille $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
   (d) Écrire la matrice de f dans cette base.
10. On veut résoudre dans cette question, l'équation $u^2 = f$, dans laquelle l'inconnue u désigne un endomorphisme de E.
    Soit g une solution de cette équation.
    (a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice associée à g^2 s'écrit:
    $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
    (b) Montrer que f et g commutent, c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f$.
    (c) Montrer que $\ker f$, noté E_0, est stable par g.
    On note g_0 la restriction de g à E_0.
    (d) Montrer de même que $\ker(f + 2\mathrm{I}d)$, noté E_{-2} est stable par g.
    On note g_{-2} la restriction de g à E_{-2}.
    (e) En utilisant les questions précédentes et la forme de la matrice de 10a, donner la matrice associée à g.

Problème 2 :

Notations: *$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.*

Pour i et j deux entiers naturels tels que $i \leqslant j$, $[\![i\,;j]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $i \leqslant k \leqslant j$.

Partie A : étude des nombres harmoniques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n-ième nombre harmonique par
$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$
2. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
$$\ln(n+1) \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant 1 + \ln(n).$$
Aide: On pourra dans un premier temps sommer de 2 à n la relation précédente.
3. À l'aide de la relation précédente:
   (a) Démontrer que la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
   (b) Démontrer que $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Partie B: le problème de Bâle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

5. Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On explicitera le théorème de convergence utilisé.
6. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0\,;\pi]$, on pose

$$\mathrm{D}_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0\,;\pi]$,

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \mathrm{D}_n(t).$$

   (b) En déduire que, si $t \in]0\,;\pi]$,

$$\mathrm{D}_n(t) = \frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{2}t\right)}.$$

   (c) Calculer la valeur de $\mathrm{D}_n(0) = \lim\limits_{t\to 0} \mathrm{D}_n(t)$.
7. On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par

$$f : \begin{array}{ccl} [0\,;\frac{\pi}{2}] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & & \begin{cases} \dfrac{t}{\sin(t)} & \text{si } t>0 \\ 1 & \text{si } t=0 \end{cases} \end{array}$$

   (a) Démontrer que f est continue sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   (b) Démontrer que f est dérivable en 0.

   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   On citera correctement avec toutes ses hypothèses vérifiées, le théorème utilisé.

8. (a) Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel k non nul,
$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$$
(b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,
$$\mathrm{B}_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\mathrm{D}_n(t)-1}{2}\,\mathrm{d}t.$$
(c) Déterminer la valeur de
$$\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t.$$
(d) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,
$$\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
(e) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,
$$\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin(t)}\left(2 - \frac{2t}{\pi}\right)\sin\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t.$$

9. (a) Déterminer une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ telle que:
$$\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t.$$
(b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t = 0.$$
(c) En déduire la limite de la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie C: les lois géométriques

10. Démontrer que, pour tout $x \in]-1\,;1[$, la série de terme général x^k converge et que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

11. Justifier, pour tout $x \in]-1\,;1[$, l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Aide: Posant $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on pourra partir de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} x^k$ dériver, et passer à la limite lorsque $\mathrm{N} \to +\infty$

On citera précisément les théorèmes utilisés.

On admet que $\forall\, x \in]-1\,;1[$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

TO BE CONTINUED at home ...

« Un mathématicien, un physicien et un biologiste sont attablés à la terrasse du café, lorsque ils voient deux personnes entrer dans une maison en face. Quelques instants plus tard, trois personnes en sortent.
Conclusion de chacun des scientifiques :
Le biologiste : « Oh ! Ils se sont reproduits ! »
Le physicien : « Il y a erreur expérimentale... »
Le mathématicien : « Si une personne entre dans la maison, elle sera vide. » »