Extrait de CAPES 2021

Problème 1 :

PARTIE A

1. Soit $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda x + \mu f(x) = 0$.
   En composant par f, on a successivement $\lambda \underbrace{f(x)}_{\neq 0} = 0 \implies \lambda = 0$.
   Puis $\mu f(x) = 0$ entraîne à son tour $\mu = 0$. La famille $((x, f(x))$ est donc libre dans un espace de dimension 2. Elle en forme une base.
2. Comme $f(f(x)) = f^2(x) = 0$, par définition, on a:
$$\mathrm{Mat}_{\left((x,f(x)\right)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

PARTIE B

3. Composant par f, si un tel λ existait on aurait:
$$f(x) = \lambda x \implies f^2(x) = \lambda(\lambda x) \iff -x = \lambda f(x) = \lambda^2 x \iff \underbrace{(1+\lambda^2)}_{\neq 0}x = 0.$$
   La seule solution possible serait alors le vecteur nul pour x, ce qui est impossible.
   Donc, il n'existe pas de réel λ tel que $f(x) = \lambda x$ d'inconnue $x \in \mathrm{E}$, admette une solution non nulle.
   Commentaire: *$f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(\lambda x) = \lambda^2 x$ par linéarité et non $\lambda^2 x^2$.*
4. La question précédente assure déjà la liberté de la famille $\big((x, f(x)\big)$.
   De manière directe, l'idée est encore de composer par f une combinaison linéaire nulle de x et $f(x)$:
$$\lambda x + \mu f(x) = 0 \implies \lambda f(x) - \mu x = 0 \iff \lambda f(x) = \mu x.$$
   Si $\lambda \neq 0$, alors $f(x) = \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right) x$ ce qui est impossible d'après la question précédente.
   Donc $\lambda = 0$ puis $\mu f(x) = 0 \implies -\mu \underbrace{x}_{\neq 0} = 0 \implies \mu = 0$ en composant par f.
   La famille $\big((x, f(x)\big)$ est donc libre.
5. D'après la question précédente, $\dim \mathrm{F} \geqslant 2$.
   Une famille de deux vecteur ne saurant être de dimension supérieur à 2, on en déduit que:
$$\dim \mathrm{F} = 2.$$
6. Le même raisonnement que précédemment montre facilement que $\big((y, f(y)\big)$ forme une famille libre de E.
   Si $f(y) \in \mathrm{vect}\,\big((x, f(x)\big)$ alors il existerait $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(y) = \lambda x + \mu f(x)$.
   En composant par f, on aurait alors $-y = \lambda f(x) - \mu x \implies y \in\in \mathrm{vect}\,\big((x, f(x)\big)$ ce qui n'est pas.
   La famille $\big((y, f(y)\big)$ forme donc une famille libre de G de dimension $4 - 2 = 2$ donc une base.
   Les espace F et G étant supplémentaires, la famille $\mathcal{B}'$ est donc une base de E.

7. Comme $f^2(z) = f(f(z)) = -z$ pour tout $z \in \{x, y\}$, on a:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

PARTIE C

Dans cette partie E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.

On définit sur E l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe $f(P)$ défini par:

$$f(P)(X) = (1 + X^2)P''(X) - 2XP'(X).$$

8. Par linéarité de la dérivation des polynômes, f est clairement linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

   Or, $\deg f(P)(X) = \max\left\{\deg\left((1+X^2)P''(X)\right), \deg\left(2XP'(X)\right)\right\}$
   $= \max\{2 + \deg P - 2, 1 + \deg P - 1\} = \deg P.$

   Donc, Im $f \in \mathbb{R}_3[X]$ et f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_3[X]$.

9. (a) On a:

   - $f(1) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$.
   - $f(X) = -2X$.
   - $f(X^2) = 2 - 2X^2$.
   - $f(X^3) = 6X$.

   En notant $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$, on a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Les lignes de la matrice de f fournissent un système d'équations du noyau de f *i.e.*

$$P\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \ker f \iff \begin{cases} 2a_2 & = 0 \\ -2a_1 + 6a_3 & = 0 \\ -2a_2 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 & = a_0 \\ a_1 & = 3a_3 \\ a_2 & = 0 \\ a_3 & = a_3 \end{cases} \in \mathrm{vect}\left(P_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_1\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$\text{Donc,} \quad \ker f = \mathrm{vect}\left(1, 3X + X^3\right).$$

De même, pour $\ker(f+2\mathrm{Id}) = \ker\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f+2\mathrm{Id})\right) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \ker(f+2\mathrm{Id}) \iff \begin{cases} 2a_0 + 2a_2 & = 0 \\ 6a_3 & = 0 \\ 2a_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 & = -a_2 \\ a_1 & = a_1 \\ a_2 & = a_2 \\ a_3 & = 0 \end{cases} \in \mathrm{vect}\left(\mathrm{P}_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{P}_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$\text{Donc,} \quad \ker(f+2\mathrm{Id}) = \mathrm{vect}\left(\mathrm{X}, \mathrm{X}^2 - 1\right).$$

(c) La famille $\mathcal{P} = (\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ de quatre polynômes est étagée par les degrés donc libre donc une base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ de dimension 4.

(d) Par définition des P_i, on a $f(\mathrm{P}_0) = f(\mathrm{P}_1) = 0$, $f(\mathrm{P}_2) = -2\mathrm{P}_2$ et $f(\mathrm{P}_3) = -2\mathrm{P}_3$. Donc,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{P}}(f)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

10. (a) C'est exactement le résultat de la question 9d.

(b) Par définition de g, on a $f \circ g = g^2 \circ g = g^3 = g \circ g^2 = g \circ f$.
Donc f et g commutent.

(c) Soit $x \in \ker f$.

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0 \implies g(x) \in \ker f.$$

(d) Raisonnement identique: soit $x \in \ker(f+2\mathrm{Id})$.

$$\begin{aligned}(f+2\mathrm{Id})(g(x)) &= (f \circ g)(x) + 2g(x) = (g \circ f)(x) + 2g(x) = g(f(x)) + 2g(x) \\ &= g(f(x) + 2x)) = g((f+2\mathrm{Id})(x)) = g(0) = 0. \\ &\implies g(x) \in \ker(f+2\mathrm{Id}).\end{aligned}$$

Donc, $\ker(f+2\mathrm{Id})$ est stable par g.

(e) Les questions 10c et 10d permettent de chercher séparément les matrices de g_0 et g_{-2} respectivement dans E_0 et E_{-2}.

Comme f est nulle sur E_0, il en est de même pour g et on a: $\mathrm{Mat}_{(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1)}(g_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par définition de g,

$$\mathrm{Mat}_{(\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3)}(g_{-2}^2) = \mathrm{Mat}_{(\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3)}(f_{|\mathrm{E}_{-2}}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{Mat}_{(\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3)}(g_{-2}^2) = \mathrm{Mat}_{(\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3)}(g_{-2})^2$, on est ramené à cherché une matrice $\mathrm{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\mathrm{G}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On vérifiera que $G = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ convient.

Comme $E = E_0 \oplus E_{-2}$, dans la base $\mathcal{P}$, on obtient:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{P}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Problème 2 :

Partie A :

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\forall\, k \geqslant 2$, par croissance de l'intégrale, on a:

$$k \leqslant x \implies \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k} \implies \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x \qquad \left(x \longmapsto \frac{1}{x} \text{ continue sur } [2\,;+\infty[\right)$$
$$\implies \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}.$$

Partant de $k-1 \leqslant x$, on obtient, par un raisonnement analogue, $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Donc, $\forall\, k \geqslant 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

2. Il suffit de sommer les inégalités précédentes, de même sens, pour $k = \mathbf{2}, \dots, n$, utiliser la relation de Chasles sur l'intégrale et d'obtenir:

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant H_n - 1 \leqslant \ln(n)$$

Ajoutons 1 aux membres de l'inégalité,

$$\ln(n+1) \leqslant \ln(n+1) + \underbrace{1 - \ln(2)}_{\geqslant 0} \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

$$\text{Donc, } \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

3. À l'aide de la relation précédente:

   (a) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

   (b) Pour $n \geqslant 2$, $\ln(n) > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\ln(n)}{\ln(n)} = 1$.

   D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{H_n}{\ln(n)} = 1$ *i.e.* $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Partie B:

4. $\forall\, k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k(k-1)} \geqslant \dfrac{1}{k \times k} = \dfrac{1}{k^2}$.
5. La série $\sum_{k\geqslant 2} \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ de terme général $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ est une série télescopique convergente de limite $\lim_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} = 1$.
   En tant que série à termes positifs, la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante. Elle est également majorée par 2.
   D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente.
   Commentaire: *Dans l'esprit du sujet, on ne peut invoquer les séries de Riemann de terme* $\dfrac{1}{k^2}$*!*
6. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0\,;\pi]$, on pose

$$\mathrm{D}_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

   (a) Il suffit d'utiliser la formule d'Euler pour $k \neq 0$, et d'écrire $e^{\mathrm{i}kt} + e^{-\mathrm{i}kt} = 2\cos(kt)$.

$$\forall t \in [0\,;\pi]\,,\ \mathrm{D}_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kt) = \mathrm{D}_n(t) = e^{\mathrm{i}0t} + \sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}kt} + e^{-\mathrm{i}kt} = \sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}kt}.$$

   (b) Dans l'expression précédente, après réindiçage, on reconnaît la somme des $2n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{it} \neq 1$ si $t \in]0\,;\pi]$:

$$\forall\, t \in]0\,;\pi]\,,\ \mathrm{D}_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{\mathrm{i}kt} = \sum_{k=0}^{2n} e^{\mathrm{i}(k-n)t} = e^{-\mathrm{i}nt} \sum_{k=0}^{2n} \left(e^{\mathrm{i}t}\right)^k$$
$$= e^{-\mathrm{i}nt}\frac{1-\left(e^{\mathrm{i}t}\right)^{2n+1}}{1-e^{\mathrm{i}t}} = e^{-\mathrm{i}nt}\frac{1-e^{\mathrm{i}(2n+1)t}}{1-e^{\mathrm{i}t}}.$$

   Factorisons par l'angle moitié,

$$= \underbrace{e^{-\mathrm{i}nt} \times \frac{e^{\mathrm{i}\left(\frac{2n+1}{2}\right)t}}{e^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\right)t}}}_{\text{rhoo! } = e^{\mathrm{i}0} = 1} \times \frac{e^{-\mathrm{i}\left(\frac{2n+1}{2}\right)t} - e^{\mathrm{i}\left(\frac{2n+1}{2}\right)t}}{e^{-\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\right)t} - e^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\right)t}}.$$

   Il n'y a plus qu'à réutiliser les formules d'Euler pour conclure:

$$= \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.$$

   (c) Un petit développement limité en 0, s'écrit:

$$\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\left(\frac{1}{2}t\right)} = 2n+1.$$

   Donc, $\lim_{t\to 0} \mathrm{D}_n(t) = 2n+1$ *i.e.* on peut prolonger D_n par continuité en 0 en posant $\mathrm{D}_n(0) = 2n+1$.

7. On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par

$$f:\quad \begin{array}{rcl}[0\,;\frac{\pi}{2}] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ t & & \begin{cases} \dfrac{t}{\sin(t)} & \text{si } t>0 \\ 1 & \text{si } t=0 \end{cases}\end{array}$$

(a) Comme quotient de fonctions continues de dénominateur non nul sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, f est continue sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Encore un développement limité s'écrit $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1$ donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = f(0)$: la fonction f est continue en 0.
La fonction f est donc continue sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(b) Évaluons la limite ne 0 du taux d'accroissement de f en 0:

$$\forall\, h\neq 0,\ \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\dfrac{h}{\sin h}-1}{h} = \frac{1}{\sin h}-\frac{1}{h} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h-\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}\left(h^3\right)}-\frac{1}{h}$$
$$\underset{h\to 0}{=} \frac{h}{6}+\mathrm{o}\left(h\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

(c) Pour tout $x\in\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, f est dérivable et on a $f'(x) = \dfrac{\sin(t)-t\cos(t)}{\sin^2(t)}$.

$$f'(x) = \frac{\sin(t)-t\cos(t)}{\sin^2(t)} \underset{t\to 0}{=} \frac{t-\frac{t^3}{6}-t+\frac{t^3}{2}+\mathrm{o}\left(t^3\right)}{\sin^2(t)}$$
$$\underset{t\to 0}{=} \frac{\frac{1}{3}t^3+\mathrm{o}\left(t^3\right)}{\sin^2(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{3}t^3}{t^2} = \frac{1}{3}t \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

On sait donc désormais que:

- f est continue sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- f est dérivable sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
- D'après les théorèmes généraux, f' est continue sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ *i.e.* f' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = 0 = f'(0)$.

D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

8. (a) Soit k entier non nul.
Les fonctions $t\longmapsto \dfrac{t^2}{2\pi}-t$ et $t\longmapsto \dfrac{1}{k}\sin(kt)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$, on peut intégrer par parties l'expression demandée:

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1}{k}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sin(kt)\right]_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{k}\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin(kt)\,\mathrm{d}t$$

Les fonctions $t \longmapsto \frac{t}{\pi} - 1$ et $t \longmapsto -\frac{1}{k}\cos(kt)$ étant aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$, une nouvelle IPP s'écrit:

$$= -\frac{1}{k}\underbrace{\left[-\frac{1}{k}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\cos(kt)\right]_0^\pi}_{=\frac{1}{k^2}} + \frac{1}{k^2}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}\cos(kt)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}\underbrace{\left[\frac{1}{\pi k}\sin(kt)\right]_0^\pi}_{=0} = \frac{1}{k^2}.$$

(b) D'après la question précédente et par linéarité de l'intégrale,

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{k=1}^n \cos(kt)\,\mathrm{d}t.$$

Or, par définition, $\forall\, t \in [0\,;\pi]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\mathrm{D}_n(t)-1}{2}$,

$$\text{Donc } \mathrm{B}_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\mathrm{D}_n(t)-1}{2}\,\mathrm{d}t.$$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$

(d) D'après la question 6c et les théorèmes généraux, les fonctions $t \longmapsto \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\mathrm{D}_n(t)-1}{2}$ et $t \longmapsto \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\mathrm{D}_n(t)2$ sont continues sur $[0\,;\pi]$.
Partant de 8b, par linéarité de l'intégrale, on a alors:

$$-\mathrm{B}_n = \int_0^\pi -\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\mathrm{D}_n(t)-1}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t$$

D'après 8c,

$$\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

(e) D'après 6c la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = \mathrm{D}_n(t)$ est continue sur $[0\,;\pi]$. Il en est de même de la fonction produit avec le polynôme $t - \frac{t^2}{2\pi}$.
On utilise le résultat de 6b:

$$\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\,\mathrm{d}t$$

Effectuons le changement de variable $2u = t$ dans l'intégrale,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2u - \frac{2u^2}{\pi}\right) \frac{\sin\left(2n+1\right)u}{\sin\left(u\right)} 2\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\sin(u)} \left(2 - \frac{2u}{\pi}\right) \sin\left(\left(2n+1\right)u\right)\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Donc, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin(t)} \left(2 - \frac{2t}{\pi}\right) \sin\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t.$$

9. (a) Soit f la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la question 7.
On pose $g : t \longmapsto f(t) \times \left(2 - \dfrac{2t}{\pi}\right)$, produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ d'après 8c donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et telle que:

$$\frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t.$$

(b) D'après 9a, les fonctions $t \longmapsto g(t)$ et $t \longmapsto -\dfrac{1}{2n+1}\cos(2n+1)t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut intégrer par parties l'expression suivante:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2n+1}\Big[-g(t)\cos(2n+1)t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\cos\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\cos\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc sa dérivée y est continue sur un segment donc bornée par un réel $\mathrm{M} \geqslant 0$. D'où

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \left|\frac{g(0)}{2n+1}\right| + \left|\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\cos\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{|g(0)|}{2n+1} + \frac{\mathrm{M}}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left|\cos\left((2n+1)t\right)\right|}_{\leqslant 1}\mathrm{d}t \\
&\leqslant \underbrace{\left(|g(0)| + \frac{\mathrm{M}\pi}{2}\right)}_{\text{Constant}} \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t = 0$.

(c) D'après 9b et les théorèmes sur les limites de somme, on trouve finalement: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^2}{6} - \mathrm{B}_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} \mathrm{B}_n = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Partie C: les lois géométriques

10. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Posons $\mathrm{S_N}(x) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} x^k$.
    On reconnait la somme des N+1 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $x \neq 1$ pour tout $x \in \,]-1\,;1[$.
    D'où, $\mathrm{S_N}(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^{\mathrm{N}+1}}{1-x}$.
    Comme $|x| < 1$, $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \dfrac{x^{\mathrm{N}+1}}{1-x} = 0$, et la série de terme général x^k converge et on a:
    $$\forall\, x \in \,]-1\,;1[\,,\ \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

11. Somme de fonctions dérivable sur $]-1\,;1[$, $\mathrm{S_N}$ l'est également et on a:
    $$\forall x \in \,]-1\,;1[\,,\ \mathrm{S}'_{\mathrm{N}}(x) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{((\mathrm{N}+1)(1-x)+x)}{(1-x)^2} \times x^{\mathrm{N}}.$$
    Avec $|x| < 1$, par prépondérance des fonctions puissances sur les produits,
    $$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{((\mathrm{N}+1)(1-x)+x)}{(1-x)^2} \times x^{\mathrm{N}} = 0.$$
    La série de terme général kx^{k-1} est donc convergente et on a:
    $$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$