Types de raisonnement

Exercice 1 : Soit y un réel.
Tout d'abord, La fonction f n'étant définie que sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ si un réel x vérifiant $f(x)=y$ existe alors, nécessairement $x\neq\frac{1}{2}$.
Sous cette condition, l'équation $f(x)=y$ est équivalente à

$$y=\frac{x+1}{2x-1} \iff y(2x-1)=x+1 \iff 2xy-x=y+1 \iff x(2y-1)=y+1.$$

Si $y\neq\frac{1}{2}$, alors $x_{(y)}=\frac{y+1}{2y-1}$. La condition $y\neq\frac{1}{2}$ apparaît ici comme une condition nécessaire à l'existence de x.
Réciproquement, on vérifie que le réel $x_{(y)}$ convient soit en calculant

$$f(x_{(y)})=\frac{x_{(y)}+1}{2x_{(y)}-1}=\frac{\frac{y+1}{2y-1}+1}{2\frac{y+1}{2y-1}-1}=\frac{\frac{y+1+2y-1}{2y-1}}{\frac{2(y+1)-2y+1}{2y-1}}=\frac{\frac{3y}{\cancel{2y-1}}}{\frac{3}{\cancel{2y-1}}}=y,$$

soit en remontant la suite des équivalences précédentes.
Dans tous les cas $f(x_{(y)})=y$ donc $x_{(y)}$ convient. Il est, de plus, unique par définition.
Reste à vérifier que $x_{(y)}\neq\frac{1}{2}$:

$$\text{Or, } x_{(y)}=\frac{1}{2} \iff \frac{y+1}{2y-1}=\frac{1}{2} \iff 2y-1=2y+2 \iff 0y=1.$$

L'ensemble des solutions de la dernière équation étant vide il en est de même de celui de $x_{(y)}=\frac{1}{2}$ donc $x_{(y)}\neq\frac{1}{2}$.
En regroupant les conditions nécessaires et suffisantes, on a donc bien montré que pour tout $y\neq\frac{1}{2}$, il existe un unique réel $x\neq\frac{1}{2}$ tel que $f(x)=y$.

Exercice 2 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Ne sachant pas du tout à quoi pourraient ressembler les fonctions cherchées on va mener un raisonnement par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons que $f=g+h$ où g est une fonction affine de la forme

$$g : x \longmapsto g(x)=mx+p$$

et h telle que $h(1)=h(-1)=0$.
Trouver g revient à déterminer les coefficients m et p.
Or, en évaluant en 1 et -1, on obtient :

$$\begin{cases} f(1) &= m+p \\ f(-1) &= -m+p \end{cases} \iff \begin{cases} m &= \dfrac{f(1)-f(-1)}{2} \\ p &= \dfrac{f(1)+f(-1)}{2} \end{cases}$$

Nécessairement,

- $g : x \longmapsto \dfrac{f(1) - f(-1)}{2} x + \dfrac{f(1) + f(-1)}{2}$.
- $h = f - g$.

Synthèse : Considérons les fonctions g et h définies comme ci-dessus alors :

- Par construction, $f = g + h$.
- g est bien une fonction affine qui vérifie, en particulier, $g(1) = f(1)$ et $g(-1) = f(-1)$.
- $h = f - g$ vérifie $h(1) = f(1) - g(1) = f(1) - f(1) = 0$ et $h(-1) = f(-1) - g(-1) = 0$.

On a donc montré que toute fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction affine, et d'une fonction s'annulant en -1 et 1.

Remarque : Par construction, cette décomposition est, de plus, unique.

Exercice 3 : Posons $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 3^n - 2^n$ et montrons, par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : $3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = u_0$ et $3^1 - 2^1 = 3 - 2 = 1 = u_1$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ soient vraies. Alors,

$$\begin{aligned}
u_{k+2} = 5u_{k+1} - 6u_k &= 5(3^{k+1} - 2^{k+1}) - (2 \times 3)(3^k - 2^k) && \text{par hypothèses de récurrence} \\
&= 5 \times 3^{k+1} - 5 \times 2^{k+1} - 2 \times 3^{k+1} + 3 \times 2^{k+1} && a \times a^n = a^{n+1} \\
&= 3 \times 3^{k+1} - 2 \times 2^{k+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Synthèse : Initialisée pour $n = 0$ et $n = 1$ et héréditaire, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 3^n - 2^n.$$

Exercice 4 : Posons $\mathcal{P}(n)$: $\exists ! (p\,;q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \,/\, n = 2^p(2q+1)$ et montrons, par récurrence forte, que pour tout naturel n non nul, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : $1 = 2^0 \times (2 \times 0 + 1)$ donc le couple $(0\,;0)$ convient et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier non nul n tel que $\forall k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ soit vraie.

— Si n est pair alors il existe un entier naturel q tel que $n = 2q$.
D'où $n + 1 = 2q + 1 = 2^0(2q+1)$ et le couple $(0\,;q)$ convient.

— Si n est impair, alors $n+1$ est pair et il existe donc un entier $p' \leqslant n$ tel que $n + 1 = 2p'$.
Par hypothèse de récurrence, on peut donc écrire p' sous la forme $p' = 2^p(2q+1)$ et obtenir $n + 1 = 2^{p+1}(2q+1)$.

Dans tous les cas, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée et la propriété est héréditaire.

Synthèse : Initialisée pour $n = 1$ et héréditaire, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit n entier naturel non nul.
Pour montrer que le couple $(p\,;q)$ d'entiers tel que $n = 2^p(2q+1)$ est unique on suppose l'existence d'un deuxième couple $(p'\,;q')$ vérifiant les mêmes propriétés. On peut même supposer que $p \geqslant p'$ sans perte de généralités. On a alors,

$$2^p(2q+1) = 2^{p'}(2q'+1) \iff 2^{p-p'}(2q+1) = 2q'+1.$$

Le membre de gauche ne peut être un nombre impair que si $p = p'$.
L'équation se réduit alors à $2q+1 = 2q'+1 \iff q = q'$. Le couple $(p\,;q)$ est donc unique.
En conclusion, tout entier naturel non nul peut s'écrire de manière unique sous la forme $n = 2^p(2q+1)$ avec $(p\,;q) \in \mathbb{N}^2$.

Commentaires: *À la vue de vos copies, on retiendra que :*

- *Une succession d'affirmations ne prouve rien. Affirmer n'est pas démontrer.*
- *Un torchon ne sera pas lu.*
- *L'orthographe fait partie intégrante de l'appréciation de votre copie donc on retiendra qu'une hypothèse, une image, une fonction, une propriété sont des noms FEMININS. Tous les adjectifs épithètes s'y rapportant prennent donc un E à la fin voire un ES dans les féminins pluriels.*
- *Ne pas confondre la fonction f et $f(x)$ l'image de x par f.*
- *Dans la même idée, on ne dérive pas $f(x)$ mais f. f peut être continue mais pas $f(x)$. f peut être décroissante mais pas $f(x)$. g peut être une fonction affine, pas $g(x)$,…*
- *Un quotient de fonctions continues n'est pas forcément continue ou dérivable.*
- *Invoquer le TVI à l'exercice 1 sans aucune justification, ne démontre rien. Le faire avec une fonction non continue est un non sens.*
- *Dans les hypothèses du TVI, il est capital de s'assurer que $k \in f(\mathrm{I})$ avant d'affirmer que l'équation $f(x) = k$ admet une solution.*
- *On ne dérive pas sans justifier que la fonction est dérivable sur un ensemble à préciser systématiquement.*
- $x \longmapsto \dfrac{x+1}{2x-1}$ *n'est pas décroissante sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ *mais seulement sur* $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[$ *ET* $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
- *Le trait des fractions sera toujours tracer sur la ligne principale.*
- *On gagnera à expliquer clairement, concisément, brièvement mais efficacement sa démarche avant tout calcul.*
- *Une récurrence double nécessite une initialisation…double.*
- *Pour l'initialisation de l'exercice 3, on doit vérifier que $u_0 = 0$ et $3^0 - 2^0 = 0$ sont égaux et non écrire $u_0 = 3^0 - 2^0 = 0$ qui est une paraphrase non "démontrante" de ce que l'on veut.*
- *Lors de l'hérédité d'une récurrence forte, on suppose l'existence d'un entier m tel que la propriété soit vraie pour TOUS les entiers k inférieurs à m.*
- *Supposer qu'il existe deux couples $(p\,;q)$ et $(p'\,;q')$ vérifiant notre propriété puis montrer qu'ils sont égaux n'est pas un raisonnement par l'absurde.*