

Ensembles

Exercice 1 : Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $\ell \in \mathbb{R}$ et \mathcal{P} la proposition :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists B \in \mathbb{R}_+^*, (\forall x \in \mathbb{R}, x \geq B \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

1 Donner la négation de \mathcal{P} .

2 Montrer que f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ vérifie \mathcal{P} pour $\ell = 1$.

Exercice 2 : Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = -y\}$.
Montrer que $B \subset A$. A-t-on $A = B$?

Exercice 3 : Soit E un ensemble. Montrer pour toutes parties A, B et C de E :

1 $A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A} \iff A \setminus B = \emptyset \iff \bar{A} \cup B = E$

2 $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = B$.

3 Montrer que $\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ B \cup C = B \cap A \\ C \cup A = C \cap B \end{cases} \implies A = B = C$