Ensembles

Exercice 1 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. $\exists\,\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, \mathrm{B} \in \mathbb{R}_+^*, (\exists\, x \in \mathbb{R}, x \geqslant \mathrm{B}$ et $|f(x) - \ell| > \varepsilon)$.

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On raisonne par équivalences en remarquant que, comme $f(x) > 1$, $|f(x) - 1| \leqslant \varepsilon \iff f(x) - 1 \leqslant \varepsilon$:

$$\forall\, x \neq 2,\ f(x) - 1 \leqslant \varepsilon \iff \frac{x+3}{x+2} - 1 \leqslant \varepsilon \iff \frac{1}{x+2} \leqslant \varepsilon$$

Comme $x + 2 \neq 0$, on peut composer les deux membres de l'inégalité par la fonction inverse :

$$\iff x + 2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \iff x \geqslant \frac{1 - 2\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Il suffit alors de prendre, par exemple, $\mathrm{B} = \max\left(1\,;\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}\right)$ pour avoir la relation $\mathcal{P}$.

Commentaire: *On vient de montrer que la courbe de la fonction f admettait la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote en $+\infty$*

Exercice 2 : B est l'ensemble des couples de réels de la forme $(x\,; -x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Soit $(x\,; -x) \in \mathrm{B}$.
$x^2 - x \times (-x) - 2(-x)^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 = 0$ implique que $(x\,; -x) \in \mathrm{A}$.
Donc $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$.
Quitte à factoriser $x^2 - xy - 2y^2 = (x + y)(x - 2y)$ au brouillon, le couple $(2\,; 1)$ est élément de A mais pas de B donc $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$.

Exercice 3 : Soit E un ensemble. Montrer pour toutes parties A, B et C de E :

1. Montrons ces équivalences par implications tournantes *i.e.*

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies \overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}} \implies \mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \varnothing \implies \overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E} \implies \mathrm{A} \subset \mathrm{B}.$$

$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies \overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}}$: Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ alors, tout élément qui n'est pas dans B ne peut être dans A. Autrement dit, $x \in \overline{\mathrm{B}} \implies x \in \overline{\mathrm{A}}$ ou encore $\overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}}$.
Donc $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies \overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}}$.

$\overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}} \implies \mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \varnothing$: Par la contraposée, supposons que $\mathrm{A} \backslash \mathrm{B} \neq = \varnothing$ *i.e.* supposons qu'il existe $x \in \mathrm{A}$ avec $x \not{i}n\mathrm{B}$ alors $x \in \overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}}$ et $x \notin \mathrm{A}$ et la contradiction.
Donc $\overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}} \implies \mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \varnothing$.

$\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \varnothing \implies \overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$: On sait déjà que $\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B} \subset \mathrm{E}$.
Montrons l'inclusion réciproque et soit $x \in \mathrm{E}$. Montrons que si $x \notin \mathrm{B}$ alors $x \in \overline{\mathrm{A}}$.
Soit $x \notin \mathrm{B}$. Comme $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \varnothing$, x ne peut appartenir à A.
Donc $x \in \overline{\mathrm{A}}$ et le résultat : $\mathrm{E} \subset \overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B}$ et l'égalité.

$\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E} \implies \mathrm{A} \subset \mathrm{B}$: Supposons que $\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$ et soit $x \notin \mathrm{B}$. Alors $x \in \overline{\mathrm{A}}$.
Donc $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.

Par transitivité de l'implication, on a donc montré que :

$$A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A} \iff A \setminus B = \varnothing \iff \overline{A} \cup B = E$$

2 Comme $\overline{A} \cap B \subset B$ et $A \cap B \subset B$, on a déjà $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) \subset B$.

Réciproquement, $\forall x \in B$, $x \in A$ ou $x \notin A$ *i.e.* $x \in A \cap B$ ou $x \in \overline{A} \cap B$.
Donc $B \subset (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$ et l'égalité.

3 Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup C = C \cap B \subset B$ donc $A \subset B$.
Soit $x \in B$. Alors $x \in B \cup A = A \cap C \subset C$ donc $B \subset C$.
Soit $x \in C$. Alors $x \in B \cup C = B \cap A \subset A$ donc $C \subset A$.
On a donc montré successivement $A \subset B \subset C \subset A$ *i.e.* $A = B = C$ par transitivité et double inclusion.