Applications

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ (unité graphique 5cm).

Partie A

1. Démontrer que la droite $(\Delta) : y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$. Que peut-on en déduire pour f ? pour $\mathcal{C}$?
4. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

Partie B On note g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

1. Montrer que dans $]0\,;+\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et (E) : $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.
2. Démontrer que l'équation (E) admet une et une seule solution réelle α, dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près.
3. On pose $\mathrm{A} = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$. Encadrer A à 2.10^{-1} près (justifier) et montrer que $\mathrm{A} = f'(\alpha)$.
4. Pour tout $a > 0$, on note (T_a) la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.
   Déterminer l'équation de (T_α).
5. Dans un même repère, tracer (T_α) puis $\mathcal{C}$.
6. Que peut-on déduire des questions précédentes concernant les tangentes (T_a) à $\mathcal{C}$?
7. On admettra que (T_α) est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0\,;+\infty[$.
   a. Par lecture graphique, et sans justification, donner le nombre de solutions sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation $f(x) = m$, suivant le réel m donné.
   b. Par lecture graphique, et sans justification, donner le nombre de solutions sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation $f(x) = mx$, suivant le réel m donné.

Partie C Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Sans calculer explicitement u_n, déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer que h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer u_n. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.