

Logique - Ensembles - Applications

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisée.

Durée : 2h

La qualité de la rédaction, la présentation et l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Une marge doit être laissée au correcteur. Les pages doivent être numérotées. Les résultats doivent être soulignés ou encadrés.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4, u_1 = 11$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad u_n = 3u_{n-1} + 4u_{n-2}.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n + 3 \times 4^n$.

Exercice 2 : Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On dit que f et g commutent si, et seulement si $f \circ g = g \circ f$.

- 1 Traduire à l'aide de quantificateurs l'égalité fonctionnelle $f \circ g = g \circ f$.
- 2 Donner la traduction mathématique des assertions suivantes :
 - a A : « toutes les fonctions commutent entre elles ».
 - b B : « toutes les fonctions commutent avec au moins une fonction »
 - c C : « il existe un couple de fonctions qui commutent »
 - d D : « il existe une fonction qui commute avec toutes les fonctions »
- 3 En expliquant brièvement en français, compléter $\dots \implies \dots \implies \dots \implies \dots$ à l'aide de A, B, C et D.
- 4 On appelle centre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, noté $\mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$, l'ensemble défini par :

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \circ g = g \circ f \right\}.$$

- a Donner un élément de $\mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.
- b Parmi les assertions A, B, C et D laquelle traduit que $\mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ est non vide ?
- c Par quelle relation entre $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ se traduit l'assertion A ?

Exercice 3 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{1 + \ln(x)}$.

- 1 Déterminer le domaine de définition de f que l'on notera \mathcal{D}_f et que l'on écrira comme une réunion d'intervalles.
- 2 Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- 3 Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 4 Calculer une équation de la tangente (T_e) à la courbe représentative de f en son point d'abscisse e .
- 5 Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$. Que peut-on en déduire concernant la courbe représentative de f ?
- 6 Tracer une allure de \mathcal{C}_f et de (T_e) dans un même repère.