Logique - Ensembles - Applications

Exercice 1 : Montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = (-1)^n + 3 \times 4^n$ est vraie.

Initialisation : On a $u_0 = 4$ et $(-1)^0 + 3 \times 4^0 = 1 + 3 = 4$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

De même, $u_1 = 11$ et $(-1)^1 + 3 \times 4^1 = -1 + 12 = 11$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

La propriété $\mathcal{P}$ est donc $\boxed{\text{initialisée pour } n = 0 \text{ et } n = 1}$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang k et $k-1$ pour k un entier plus grand que 1. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. On a $u_{k+1} = 3u_k + 4u_{k-1}$, d'où par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3\left((-1)^k + 3 \times 4^k\right) + 4\left((-1)^{k-1} + 3 \times 4^{k-1}\right) \\ &= 3(-1)^k + 3 \times 3 \times 4^k + 4(-1)^{k-1} + 3 \times 4^k \end{aligned}$$

En remarquant que $(-1)^k = -(-1)^{k+1}$ et $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$, on a :

$$= -3(-1)^{k+1} + 3 \times 3 \times 4^k + 4(-1)^{k+1} + 3 \times 4^k$$

Il ne reste plus qu'à factoriser par $(-1)^{k+1}$ et 3×4^k :

$$\begin{aligned} &= (-1)^{k+1}(-3+4) + 3 \times 4^k(3+1) \\ &= (-1)^{k+1} + 3 \times 4^{k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie et la propriété est $\boxed{\text{héréditaire}}$.

Héréditaire et initialisée à partir de $n = 0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n + 3 \times 4^n}.$$

Commentaires:

— *Ne pas confondre $\mathcal{P}(n)$ avec u_n. u_n est égal à une expression, $\mathcal{P}(n)$ n'est égal à rien. C'est une assertion, un prédicat, une phrase.*

— *Une nouvelle fois, lors de l'initialisation, il suffit simplement de constater que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies en vérifiant que $u_0 = 4$ est égal à $(-1)^0 + 3 \times 4^0 = 4$ mais surement pas d'écrire $u_0 = (-1)^0 + 3 \times 4^0 = 4$ que vous ne savez absolument pas à ce stade !*

Exercice 2 :

1. L'égalité des ensembles de départ et d'arrivée étant assurée par la définition, on a :

$$\boxed{f \circ g = g \circ f \iff \forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x).}$$

2 (a) A : $\forall\,(f\,;g) \in \Big(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\Big)^2,\ f\circ g = g\circ f.$

(b) B : $\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \exists\,\Phi_f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,/\, f\circ\Phi_f = \Phi_f\circ f.$

(c) C : $\exists\,(f\,;g) \in \Big(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\Big)^2 \,/\, f\circ g = g\circ f.$

(d) D : $\exists \varphi \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,/\, \forall g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \varphi\circ g = g\circ\varphi.$

3 On a les implications suivantes :

$$\boxed{\mathrm{A} \implies \mathrm{D} \implies \mathrm{B} \implies \mathrm{C}.}$$

A $\implies$ D : En effet, si A est vraie, toutes les fonctions commutent avec toutes les autres alors n'importe laquelle commute avec les autres. Il suffit d'en fixer une quelconque, notée φ, pour obtenir l'assertion D.

D $\implies$ B : Si D est vraie alors une fonction Φ (fixée et indépendante de quoi que ce soit) commute avec toutes les fonctions. Pour tout fonction f, il suffira de considérer Φ et B est vraie.

Remarque : la réciproque. est fausse a priori car si pour chaque f, on peut construire une fonction Φ_f adaptée à f qui commute avec f cela ne signifie pas qu'une seule et même fonction va commuter avec toutes les fonctions f.

B $\implies$ C : Enfin, si B est vraie, tout couple de $(f\,;\Phi_f)$ convient et C est vraie.

4 (a) Toute fonction commute avec l'identité : $\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ id_{\mathbb{R}}\circ f = f\circ id_{\mathbb{R}}$ donc

$\boxed{id_{\mathbb{R}} \in \mathscr{C}\Big(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\Big)}$ qui est, de ce fait, non vide.

(b) Il suffit de lire. C'est l'assertion $\boxed{\mathrm{D}}$.

(c) Par construction, on a $\mathscr{C}\Big(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\Big) \subset \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Si A est vraie alors toute fonction de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est élément de $\mathscr{C}\Big(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\Big)$ *i.e.* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}\Big(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\Big)$ et l'égalité.

En conséquence, $\boxed{\mathrm{A} \iff \mathscr{C}\Big(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\Big) = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$

Commentaires:

— *Pour que deux fonctions soient égales, il est nécessaire qu'elles aient même ensembles de départ et d'arrivée.*

— $f\circ g = g\circ f$ *est une égalité dite fonctionnelle et non ponctuelle du genre* $\forall x \in \mathbb{R},\ f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$. *L'une implique l'autre mais il n'y a pas équivalence.*

— *Le centre des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est l'ensemble des fonctions qui ont l'amabilité de commuter avec TOUTES les fonctions. C'est une hypothèse très contraignante et on peut montrer que seule l'identité possède cette propriété* i.e. $\mathscr{C}\Big(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\Big) = \{id_{\mathbb{R}}\}$.

Exercice 3 :

1 La fonction f est définie quand $x > 0$ (à cause du ln) et $1+\ln(x) \neq 0$, soit $x \neq \dfrac{1}{e}$. Autrement dit,

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+*} \setminus \left\{\frac{1}{e}\right\} = \left]0\,;\frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}\,;+\infty\right[.}$$

2 Il y a donc quatre limites à calculer :

— D'après les théorèmes sur les limites de produits $\lim\limits_{x\to 0^+} x \times \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$ (pas de forme indéterminée).

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0}.$$

Remarque : On verra plus tard que l'on peut alors prolonger f par continuité en 0.

— En $\dfrac{1}{e}$, le numérateur de f tend vers $\dfrac{1}{e} > 0$. La limite de f en $\dfrac{1}{e}$ sera donc celle de $\dfrac{1}{1+\ln(x)}$:

Or, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^-} 1+\ln(x) = 0^-$ donc $\boxed{\lim_{x\to \frac{1}{e}^-} f(x) = -\infty}$.

Et, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^+} 1+\ln(x) = 0^+$ donc $\boxed{\lim_{x\to \frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty}$.

Graphiquement, la courbe de f admet la droite d'équation $x = \dfrac{1}{e}$ comme asymptote (verticale).

— Enfin, $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} \times \dfrac{1}{\frac{1}{\ln(x)}+1}$

D'après les théorèmes sur les limites de quotients, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{\ln(x)}+1} = 1$ et par prépondérance de x sur le logarithme népérien en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$.

D'après les théorèmes sur les limites de produits,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

3 Sur son domaine de définition, f est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle y est donc dérivable et on a :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = \frac{\ln(x)}{\left(1+\ln(x)\right)^2}.}$$

Autrement dit, $f'(x)$ est du signe de $\ln(x)$, ce qui permet de dresser le tableau suivant, en calculant en passant $f(1) = 1$:

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4 Comme f est dérivable en e, l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse e est donnée par :

$$(\mathrm{T}_e) : \ y = f'(e)(x-e) + f(e).$$

Avec $f'(e) = \frac{1}{4}$ et $f(e) = \frac{e}{2}$, on obtient :

$$\boxed{(\mathrm{T}_e) : \ y = \frac{1}{4}(x-e) + \frac{e}{2} = \frac{x+e}{4}.}$$

5 Ici encore, la factorisation par le terme prépondérant est la clé pour faire disparaître l'indétermination :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f, \ f'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln(x)} + 1\right)^2}.$$

D'après les théorèmes sur les limites de quotients, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln(x)} + 1\right)^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x)} = 0$.

Donc,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.}$$

Graphiquement, la courbe de f admet donc une (demie-)tangente horizontale.

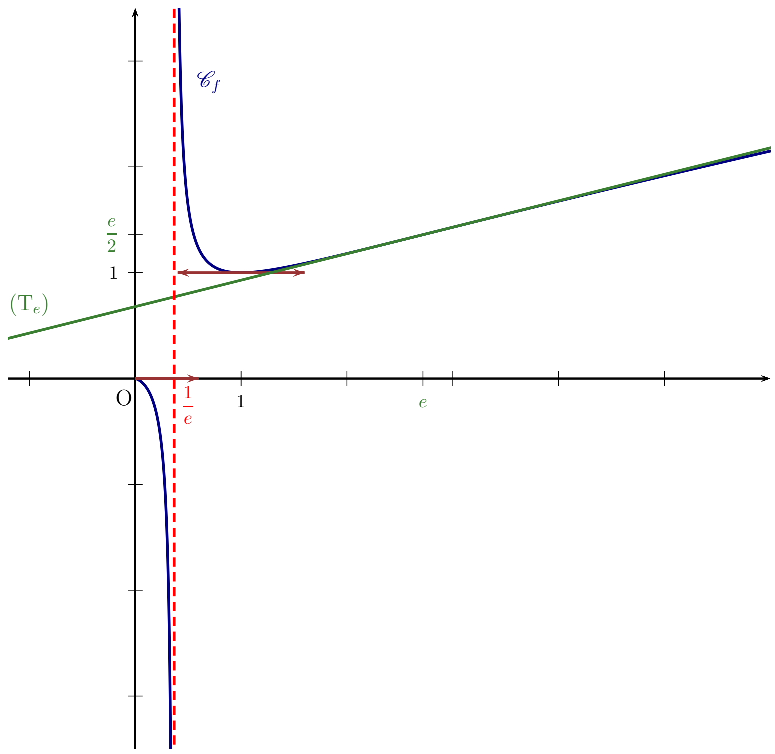
6 Dans l'ordre, on trace

a) l'asymptote verticale,

b) la tangente horizontale en 0,

c) la tangente horizontale en $(1\,;1)$,

d) et seulement enfin la courbe.



Commentaires:

— *Une équation de droite est une EQUATION. Par exemple, $y = \ldots$ mais jamais y ou $\ldots$*