Applications

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \in]0\,;+\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\imath}\,;\overrightarrow{\jmath})$ (unité graphique 5cm).

Partie A

1. D'après les théorèmes sur les limites de sommes, $\dfrac{x^2+x+1}{x^2} = 1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Par ailleurs $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{\mathrm{X}\to 0} e^{\mathrm{X}} = 1. \end{cases}$

D'après les théorèmes sur les limites de composées $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$.

D'après les théorèmes sur les limites des produits, on en déduit par produit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ *i.e.* $\boxed{\text{la droite } (\Delta) : y = 1 \text{ est asymptote à } \mathcal{C}.}$

Commentaires:

— *Lorsque les calculs de limites sont un peu longs, on manipulera l'expression de $f(x)$ à part avant d'en donner la limite plutôt que de commencer par écrire, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ldots$ puis d'oublier $\lim\limits_{x\to+\infty}$ dès la ligne d'après.*

—

2. Leur dénominateur étant non nul sur $]0\,;+\infty[$, les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^2+x+1}{x^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ y sont continues. Comme produit et composée de fonctions continues, f est donc continue sur $]0\,;+\infty[$.

De plus, d'après les théorèmes sur les limites de sommes $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x+1 = 1$ et d'après ceux de croissances comparées $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \underset{u=\frac{1}{-x}}{=} \lim\limits_{u\to-\infty} u^2e^u = 0$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1\times 0 = 0 = f(0)$.

La fonction f est continue en 0 donc sur $[0\,;+\infty[$.

Commentaires:

— *Lorsque l'on vous demande de montrer la continuité (ou la dérivabilité) d'une fonction définie par morceaux, on commence par s'assurer de la propriété sur le plus grand intervalle possible où les théorèmes généraux s'appliquent puis on regarde ce qu'il se passe aux point de raccordement.*

— *On ne peut pas invoquer les théorèmes sur les croissances comparées sans faire apparaître, a minima, des expressions de la forme $\lim\limits_{u\to-\infty} u^ne^u$ ou $\lim\limits_{u\to-\infty} \dfrac{e^u}{u^n}$. L'intuition est une chose, la justification et la rédaction en sont une autre.*

3. $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = (x^2+x+1)\times\dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$.

Facilement, $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+x+1) = 1$.

De plus, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{\mathrm{X}\to-\infty} \mathrm{X}^3e^{\mathrm{X}} = 0 \text{ d'après les limites de croissances comparées.} \end{cases}$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

On en déduit donc que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0.}$

Par définition, f est donc dérivable en 0, et $\boxed{f'(0) = 0.}$

La courbe $\mathcal{C}$ **admet au point d'abscisse 0 une tangente « horizontale » d'équation $y = 0$.**

Commentaires: *La limite du taux d'accroissement* $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ *n'est égale à* $f'(0)$ *et* f *n'est dérivable en* 0 *que si, et seulement si cette limite existe.*

Redit autrement, montrer que f *est dérivable en* 0 *revient donc à montrer que la limite de* $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ *existe* i.e. *se calcule et est différente de* $\pm\infty$. *Ceci fait et seulement là, on pourra en déduire que* f *est dérivable ne* 0 *et que* $f'(0)$ *est égal, ici par définition, à cette limite.*

4 Sur $]0\,;+\infty[$, les dénominateurs x^2 et x ne s'annulant pas, la fonction f est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f'(x) &= -\frac{x+2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2+x+1}{x^2}\times\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\\ &= \frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}} \text{ qui est du signe de } 1-x.\end{aligned}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\dfrac{3}{e}$	↘	1

Commentaires: *Ayant montré que* f *était continue en* 0, *il est inutile de tracer une double barre de ce côté sur le tableau de variation.*

Partie B

1 Pour $x \in]0\,;+\infty[$, $g(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} - x\times\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}} = \dfrac{x^3+x^2+2x-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.
On raisonne alors par équivalence :

$$\begin{aligned}\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad g(x) = 0 &\iff \left(x^3+x^2+2x-1\right)\times\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = 0\\ &\iff x^3+x^2+2x-1 = 0 \quad\text{car } \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \neq 0.\end{aligned}$$

Commentaires: *Sur ce genre de question simplissime, la seule chose que cherchera et regardera le correcteur sera si vous avez précisé que vous ne divisiez pas par* 0.

2 La fonction $\mathrm{P} : x \longmapsto x^3+x^2+2x-1$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement croissante comme somme des fonctions strictement croissantes $x \longmapsto x^3$, $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto 2x-1$. Elle établit donc une bijection de $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ sur son image $\mathrm{P(I)} =]-1\,;+\infty[$.

Comme $0 \in \mathrm{P}(\mathrm{I})$, d'après le théorème du même nom, 0 admet un unique antécédent $\alpha \in]0\,;+\infty[$ *i.e.* une solution de (E).
Par ailleurs, $\mathrm{P}(0,39) < 0$ et $\mathrm{P}(0,40) > 0$ donc, en tenant compte du sens de variation de P,

$$\boxed{0,39 < \alpha < 0,40.}$$

Commentaires:

— *Il est inutile de dériver P, somme de fonctions strictement croissantes sur $]0\,;+\infty[$, pour connaître ses variations !*

— *Afin d'utiliser le théorème de la bijection ou des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, il est très important de citer les hypothèses vérifiées par f sinon personne ne vous donnera les points.*

3 • Comme f est croissante sur $[0,1]$,

$$0,39 < \alpha < 0,40 \implies f(0,39) \leqslant f(\alpha) \leqslant f(0,40).$$

• D'autre part, la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où

$$0,39 < \alpha < 0,40 \implies \frac{1}{0,40} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,39}.$$

• En multipliant ces inégalités dont les membre **positifs**), on obtient :

$$\frac{f(0,39)}{0,40} < \frac{f(\alpha)}{\alpha} < \frac{f(0,40)}{0,39}$$

Or, après calcul , $1,95 < \dfrac{f(0,39)}{0,40}$ et $\dfrac{f(0,40)}{0,39} < 2,06$.

On peut donc en déduire que $\boxed{1,9 < \mathrm{A} < 2,1}$, ce qui fournit bien un encadrement à 2.10^{-1} près.
Il suffit alors d'utiliser la définition de α :

$$g(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0 \underset{\alpha \neq 0}{\iff} \boxed{f'(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \mathrm{A}}.$$

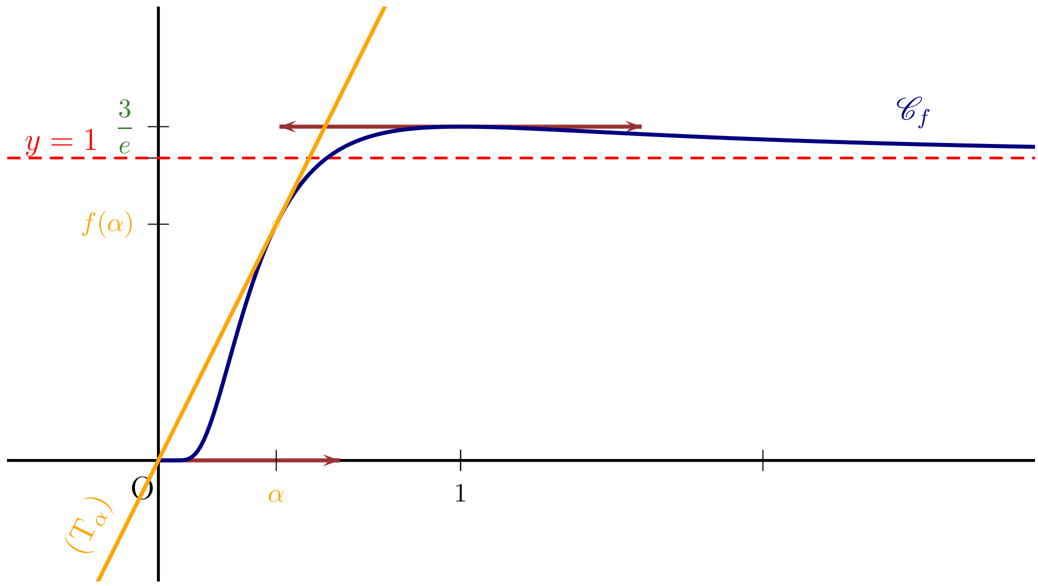
Commentaires: *Même commentaire que précédemment sur la non nullité de α.*

4 Pour tout $\alpha > 0$, la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α admet pour équation

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}_\alpha) :\ y &= f'(a)(x-a) + f(a)\\ &= f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha) = \underbrace{f'(\alpha)}_{\mathrm{A}}x + \underbrace{f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)}_{=g(\alpha)=0}\end{aligned}$$

$$(\mathrm{T}_\alpha) :\ y = \mathrm{A}x.$$

5



Commentaires: *Une courbe sans ses asymptotes et ses tangentes particulières sera bien peu attrayante et souvent très moche.*

6 Pour $a > 0$, on a $(\mathrm{T}_a) : y = f'(a)x + g(a)$. Le nombre $g(a)$ représente l'ordonnée à l'origine de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.

Dans les questions précédentes, on a prouvé que g s'annulait une, et une seule fois en α.

Par conséquent, la seule tangente à $\mathcal{C}$ passant par l'origine (mise à part la tangente à l'origine !) est T_α.

7 (a) Il suffit de lire le tableau de variations.

Nombre de solutions sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation $f(x) = m$:

- Si $m \leqslant 0$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution sur $]0\,;+\infty[$;
- si $0 < m \leqslant 1$, l'équation $f(x) = m$ a 1 solution sur $]0\,;+\infty[$;
- si $1 < m < \dfrac{3}{e}$, l'équation $f(x) = m$ a 2 solutions sur $]0\,;+\infty[$;
- si $m = \dfrac{3}{e}$, l'équation $f(x) = m$ a 1 solution (qui vaut 1) sur $]0\,;+\infty[$;
- si $m > \dfrac{3}{e}$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution sur $]0\,;+\infty[$.

(b) En admettant que T_α est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0\,;+\infty[$, nombre de solutions sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation $f(x) = mx$, suivant le réel m donné.

- Si $m \leqslant 0$, l'équation $f(x) = mx$ n'a pas de solution sur $]0\,;+\infty[$;
- si $0 < m < \mathrm{A}$, l'équation $f(x) = mx$ a 2 solutions sur $]0\,;+\infty[$;
- si $m = \mathrm{A}$, l'équation $f(x) = mx$ a 1 solution sur $]0\,;+\infty[$(qui vaut α) ;
- si $m > \mathrm{A}$, l'équation $f(x) = mx$ n'a pas de solution sur $]0\,;+\infty[$;

Partie C

1

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_{n+1}-u_n &= \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(d'après la relation de Chasles)}\end{aligned}$$

On intègre une fonction positive entre deux bornes bien ordonnées $\left(\dfrac{1}{n+1}\leqslant\dfrac{1}{n}\right)$, donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-u_n\geqslant 0 \iff \boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

2 Soit h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$.
Comme produit et composée de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$, h est bien dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$$\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\quad h'(x)=1\times e^{-\frac{1}{x}}+(x+1)\times\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=f(x).$$

On en déduit que $\boxed{h \text{ est bien une primitive de } f \text{ sur }]0\,;+\infty[.}$

3 Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\left[(x+1)e^{-\frac{1}{x}}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}=2e^{-1}-\left(\frac{1}{n}+1\right)e^{-n}$.

Donc, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\dfrac{2}{e}-\left(\dfrac{1}{n}+1\right)e^{-n}}$

Ce nombre représente l'aire algébrique entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=\dfrac{1}{n}$ et $x=1$.

4 Sans difficulté, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on dispose de la forme explicite est convergente et on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{2}{e}.}$

Commentaires: *L'éternel commentaire : avant de dériver quoi que ce soit, ayez l'amabilité de dire (prouver) que la fonction est dérivable sur l'intervalle concerné !!!!*