# Fonctions de référence

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $n$ strictement positif, on note

$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \sinh\left(\frac{1}{k}\right) = \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + \sinh\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \sinh\left(\frac{1}{np}\right).$$

Ce problème a pour but d'étudier la limite éventuelle de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## Partie I

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & (\cosh x)^2 + \sinh x \end{array}$

1. Résoudre l'équation $2\sinh(x) + 1 = 0$.
   On notera $\alpha$ son unique solution que l'on exprimera simplement au moyen de la fonction logarithme népérien.
2. Déterminer une expression simple de $f(\alpha)$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire que, pour tout réel $x$, on a $f(x) > 0$.

## Partie II

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & e^{\sinh x} - x - 1 \end{array}$

6. Justifier que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $g'(x)$.
7. Justifier que $g'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $g''(x)$ où $g''$ désigne la dérivée de $g'$.
8. En déduire les variations de $g'$ puis celles de $g$.
   Justifier alors que pour tout réel $x$, on a $g(x) \geqslant 0$.
9. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1[$, $1 + x \leqslant e^{\sinh x} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

## Partie III

10. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Montrer que, pour tout $k \in [\![n\,;np]\!]$, on a $\dfrac{k+1}{k} \leqslant e^{\sinh\left(\frac{1}{k}\right)} \leqslant \dfrac{k}{k-1}$.
11. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a $\dfrac{np+1}{n} \leqslant e^{S_n} \leqslant \dfrac{np}{n-1}$.
12. En déduire la convergence et la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.