Fonctions de référence

Partie I

1 En utilisant la définition de la fonction sh, on peut écrire

$$2\operatorname{sh}(x)+1=0 \iff e^x-e^{-x}+1=0 \iff (e^x)^2+e^x-1=0.$$

Or, le polynôme X^2+X-1 a pour discriminant $1-4\times(-1)=5$ donc ce polynôme possède deux racines réelles qui sont $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
D'où,

$$2\operatorname{sh}(x)+1=0 \iff \left(e^x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(e^x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)=0 \iff \begin{cases} e^x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ e^x=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Comme $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$ l'équation $e^x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ne possède pas de solution.
Par conséquent, l'unique solution α de l'équation $2\operatorname{sh}(x)+1=0$ est celle de la première équation :

$$\boxed{\alpha=\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).}$$

Commentaires:

- *Si vous posez le changement de variables $X=e^x$ trop tôt, pensez à justifier quand nécessaire que $X\neq 0$.*
- *Même si c'est vrai, il n'est pas nécessaire de rappeler que qu'il faille que l'argument de $\ln$ soit strictement positif. L'équation $e^x=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ n'a pas de solutions simplement car $e^x>0$ et $-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<0$. Rien à voir avec le domaine de définition du logarithme.*

2 On a $2\operatorname{sh}(\alpha)+1=0 \iff \operatorname{sh}(\alpha)=-\dfrac{1}{2}$. En utilisant la relation $\operatorname{ch}^2\alpha-\operatorname{sh}^2\alpha=1$, on trouve :

$$f(\alpha)=(\operatorname{ch}\,\alpha)^2+\operatorname{sh}(\alpha)=1+(\operatorname{sh}\,\alpha)^2+\operatorname{sh}(\alpha)=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{3}{4}.}$$

Commentaires: *Quand on vous demande une forme simple de $f(\alpha)$, il ne faut surtout pas revenir au calcul avec $\alpha=\ln\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ mais utiliser sa définition comme la solution de l'équation $2\operatorname{sh}(x)+1=0$ i.e. le réel tel que $2\operatorname{sh}(\alpha)+1=0$. Il suffit alors d'exprimer $f(\alpha)$ en fonction de $\operatorname{sh}(\alpha)$.*

3 On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{ch}(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{sh}(x)=+\infty$. D'après les théorèmes sur les limites de produits et de sommes, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\operatorname{ch}\,x)^2+\operatorname{sh}(x)=\boxed{+\infty.}$$

En $-\infty$, il est nécessaire de factoriser pour mettre en valeur la partie prépondérante.
Comme précédemment, l'égalité sur $\mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)=1$ permet d'écrire :

$$f(x)=\operatorname{ch}^2(x)+\operatorname{sh}(x)=1+\operatorname{sh}^2(x)+\operatorname{sh}(x)=\operatorname{sh}^2(x)\left(1+\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}+\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right).$$

Comme $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sh}(x)=-\infty$, on obtient successivement $\lim_{x\to-\infty}1+\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}+\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}=1$ et $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sh}^2(x)=+\infty$ d'après les théorèmes sur les sommes et les produit de limites puis

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sh}^2(x)\left(1+\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}+\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right)=\boxed{+\infty.}$$

Commentaires: *On pouvait également revenir aux exponentielles et factoriser par e^{-2x}, partie prépondérante en $-\infty$, mais c'est plus long et moins joli.*

4 Les fonctions ch et sh étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables.
De plus, pour tout réel x, on a :

$$f'(x)=2\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}'(x)+\operatorname{sh}'(x)=2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)+\operatorname{ch}(x)=\boxed{\big(1+2\operatorname{sh}(x)\big)\operatorname{ch}(x).}$$

En utilisant les résultats des questions 1, on a alors

$$\begin{aligned}f'(x)\leqslant 0 &\iff 1+2\operatorname{sh}(x)\leqslant 0 \text{ car } \operatorname{ch}(x)\geqslant 1>0\\ &\iff x\leqslant\alpha \text{ car } x\mapsto 1+2\operatorname{sh}(x) \text{ est croissante.}\end{aligned}$$

On complète le tableau à l'aide des résultats des questions 2 et 3.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Commentaires: *Invoquez $1+2\operatorname{sh}(\alpha)=0$ ne suffit pas à trouver le signe de f' sur $\mathbb{R}$ qui réclame un argument de monotonie de la fonction sh, par exemple.*

5 La fonction f est décroissante sur $]-\infty,\alpha]$ donc

$$\forall x\in]-\infty,\alpha],\text{ on a } f(x)\geqslant f(\alpha)=\frac{3}{4}>0.$$

De plus, la fonction f est croissante sur $[\alpha,+\infty[$, on a

$$\forall x\in[\alpha,+\infty[,\text{ on a } f(x)\geqslant f(\alpha)=\frac{3}{4}>0.$$

Ainsi, $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)>0.}$

Partie II

6 Les fonctions sh, exp, et $x \mapsto -x-1$ étant dérivables, la fonction g est dérivable en tant que composée et somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x, on a :

$$g'(x) = \operatorname{sh}'(x)e^{\operatorname{sh} x} - 1 = \boxed{\operatorname{ch}(x)e^{\operatorname{sh} x} - 1.}$$

Commentaires: *Les arguments invoqués pour la dérivabilité de g et g' étant les mêmes, on aurait très bien pu dès cette question, dire que g était deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.*

7 Les fonctions ch, exp, et sh étant dérivables, la fonction g' est dérivable en tant que composée, produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x, on a :

$$g''(x) = \operatorname{ch}'(x)e^{\operatorname{sh} x} + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}'(x)e^{\operatorname{sh} x} = (\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}^2(x))e^{\operatorname{sh} x} = \boxed{f(x)\, e^{\operatorname{sh} x}.}$$

8 On a montré dans la question 5 que f était à valeurs strictement positives. Par conséquent, l'expression de g'' obtenue dans la question précédente montre que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) > 0.}$$

On en déduit que g' est une fonction croissante.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$			$+$		
g'	↗		0	↗	

De plus, on a $g'(0) = 0$ donc g' est négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$ de quoi l'on déduit que g est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
Commentaires: *Les limites de g' en $\pm\infty$ ne suffisent pas à donner le signe de g' sur $\mathbb{R}$.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	0	↗	

Ainsi, d'une part, la fonction g étant décroissante sur $]-\infty, 0]$, il vient

$$\forall x \in]-\infty, 0],\ \text{on a } g(x) \geqslant g(0) = 0.$$

D'autre part, la fonction g étant croissante sur $[0, +\infty[$, il vient

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \text{on a } g(x) \geqslant g(0) = 0.$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) \geqslant 0.}$

9 Soit $x \in [0,1[$, Comme $g(x) \geqslant 0$, par définition de g, on a :

$$e^{shx} - x - 1 \geqslant 0 \iff 1 + x \leqslant e^{\operatorname{sh} x}. \tag{III.1}$$

Par ailleurs, en appliquant cette même inégalité à $-x$, on obtient :

$$1 - x \leqslant e^{\operatorname{sh}(-x)} = e^{-\operatorname{sh} x} = \frac{1}{e^{\operatorname{sh} x}}.$$

Or, $x < 1 \iff 1 - x > 0$. La fonction inverse étant décroissante sur $]0,+\infty[$, il vient

$$e^{\operatorname{sh} x} \leqslant \frac{1}{1-x}. \tag{III.2}$$

En combinant les deux inégalités (III.1) et (III.2), on obtient finalement :

$$\boxed{1 + x \leqslant e^{\operatorname{sh} x} \leqslant \frac{1}{1-x}.} \tag{III.3}$$

Partie III

10 On a $k \geqslant n \geqslant 2$ donc $0 \leqslant \frac{1}{k} < 1$.

On peut alors appliquer la relation (III.3) pour $x = \frac{1}{k}$:

$$1 + \frac{1}{k} \leqslant e^{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{k}} \iff \boxed{\frac{k+1}{k} \leqslant e^{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)} \leqslant \frac{k}{k-1}.}$$

11 Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, par définition, on a :

$$e^{S_n} = e^{\sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)} = \prod_{k=n}^{np} e^{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)}.$$

Or, pour tout entier $k \in [\![n, np]\!]$, on a montré lors de la question précédente :

$$(0 <) \quad \frac{k+1}{k} \leqslant e^{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)} \leqslant \frac{k}{k-1}.$$

En multipliant membre à membre les inégalités précédentes toutes **strictement positives**, il s'ensuit :

$$\prod_{k=n}^{np} \frac{k+1}{k} \leqslant e^{S_n} \leqslant \prod_{k=n}^{np} \frac{k}{k-1}.$$

Les produits ci-dessus sont des produits télescopiques qui se simplifient :

$$\boxed{\frac{np+1}{n} \leqslant e^{S_n} \leqslant \frac{np}{n-1}.}$$

12 En composant par la fonction ln qui est croissante, l'inégalité obtenue lors de la question précédente donne

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leqslant S_n \leqslant \ln\left(\frac{np}{n-1}\right).$$

Or, on a d'une part $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(p + \frac{1}{n}\right) = \ln p$.

Et, d'autre part $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{np}{n-1}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{p}{1-\frac{1}{n}}\right) = \ln p$.

Grâce au théorème d'encadrement, on obtient ainsi :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathrm{S}_n = \ln p.}$$

Commentaires:

— *$f(x)$ n'est toujours pas une fonction mais seulement la valeur de f en x.*