

Étude d'une fonction réciproque

On considère la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ par $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

1 ÉTUDE EN 0 :

- a) Montrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R}_+ .
- b) Déterminer la limite de $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ lorsque x tend vers 0. Que peut-on en déduire pour f ? pour \mathcal{C} ?

2 ÉTUDE DE f SUR \mathbb{R}_+^* :

- a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- b) Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
- c) En déduire l'équation des tangentes (\mathcal{T}_1) et (\mathcal{T}_e) aux points d'abscisses respectives 1 et e .
- d) Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$. En déduire le tableau de variation de f .

3 COURBE \mathcal{C} :

- a) Déterminer les positions relatives de \mathcal{C} et de $(\Delta) : y = x$.
- b) Tracer la courbe représentative \mathcal{C} de f .

4 LES FONCTIONS ϕ ET ψ :

- a) f est-elle bijective? Justifier.
- b) On pose $\phi : \begin{matrix} \left[\frac{1}{e}, +\infty \right[\\ x \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right[\\ x \ln x \end{matrix}$. Montrer que ϕ est bijective.

Dans la suite, on note ψ la fonction réciproque de ϕ et Γ sa courbe représentative. On ne cherchera pas à exprimer ψ .

- c) Déterminer les ensembles de départ et d'arrivée de ψ .
- d) Déterminer $\psi\left(-\frac{1}{e}\right)$, $\psi(0)$ et $\psi(e)$.
- e) Montrer que ψ est continue sur son ensemble de définition.
- f) Simplifier $\psi(x) \ln(\psi(x))$ pour $x \in \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right[$.
- g) Justifier que ψ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{e}, +\infty \right[$, et montrer que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, +\infty \right[, \quad \psi'(x) = \frac{\psi(x)}{x + \psi(x)}$$

- h) Déterminer les tangentes (\mathcal{D}_0) et (\mathcal{D}_e) à la courbe Γ aux points d'abscisses respectives 0 et e .
- i) Tracer Γ sur le même graphique que \mathcal{C} .