Étude d'une fonction réciproque

1 (a) Sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après les théorèmes généraux sur les produits de fonctions continues, f est continue.
D'après les théorèmes de croissances comparées, on a $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0 = f(0)$.

Donc, $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$

Commentaires: *Prolonger une fonction en un point x_0 en définissant $f(x_0)$ ne veut pas dire qu'elle y sera continue. Pour cela, il faut prouver que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

(b) $\forall x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \ln x$ d'où $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty.}$

La fonction **f n'est donc pas dérivable en 0**, mais sa courbe **$\mathcal{C}$ admet au point O une demi-tangente verticale**.

Commentaires:

— *Ne confondez pas asymptote et demi-tangente !*

— *En terme de rédaction, on n'écrit pas :*

  — *« le nombre dérivé en 0 n'existe pas » mais « f n'est pas dérivable en 0 ».*

  — *« et » ou « de plus » f admet une demi-tangente verticale mais « f n'est pas dérivable en 0 MAIS admet ... ».*
  La définition du coefficient directeur de la tangente le donne comme étant le nombre dérivé de f. Il est tout de même stupéfiant qu'une tangente subsiste alors que ce nombre dérivée n'existe pas non ?

2 (a) D'après les théorèmes sur les limites de produits et sans difficulté,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}.$$

(b) Comme produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f'(x) = 1 + \ln x.}$$

(c) La fonction f étant dérivable dans un voisinage de 1 et e, sa courbe y admet des tangentes.

— $(\mathcal{T}_1)$ a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
Or, $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$, d'où

$$\boxed{(\mathcal{T}_1) : \ y = x - 1.}$$

— $(\mathcal{T}_e)$ a pour équation $y = f'(e)(x-e) + f(e)$.
Avec $f(e) = e$ et $f'(e) = 2$, on obtient

$$\boxed{(\mathcal{T}_e) : \ y = 2x - e.}$$

(d) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\iff 1 + \ln x \geqslant 0 \\ &\iff \ln x \geqslant -1 \\ &\iff x \geqslant e^{-1} \text{ car } \exp \text{ est croissante sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Commentaires: *Le signe de $\exp(x)$ n'a rien à voir dans ces inégalités. Seule la croissance de $x \longmapsto \exp(x)$ compte.*

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } f'(x) \geqslant 0 \text{ est } \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[.}$$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Commentaires: *Par construction, la fonction est définie en 0 quel que soit les problèmes de continuité ou de dérivabilité donc, il est faux de mettre une double barre sur la ligne de f en 0.*

Cependant, comme le taux d'accroissement tend vers $+\infty$, cette double barre est obligatoire dans la ligne du signe de $f'(x)$

3 (a) On étudie le signe de $f(x) - x$.
$\forall x > 0, \quad f(x) - x = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$ du signe de $\ln x - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Or, $\ln x - 1 \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant 1 \iff x \geqslant e$. Donc

— $\mathcal{C}$ **est en dessous de** (Δ) sur $[0\,;e]$.
— $\mathcal{C}$ **est au-dessus de** (Δ) sur $[e\,;+\infty[$.
— $\mathcal{C}$ et (Δ) **se coupent en** $\mathrm{O}\,(0\,;0)$ et $\mathrm{A}\,(e\,;e)$.

(b) Voir ci-dessous.

4 (a) Par la fonction f, 0 a deux antécédents 0 et 1 donc $\boxed{f \text{ n'est pas bijective.}}$

(b) — D'après les théorèmes généraux sur les produits de fonctions continues, ϕ est **continue** sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.
— Sa dérivée étant positive et ne s'annulant qu'en un point isolé, ϕ est **strictement croissante** sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

D'après le théorème de la bijection, ϕ établit donc une $\boxed{\text{bijection}}$ de $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ sur son image $\phi\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

(c) Par définition de la réciproque d'une fonction bijective, les ensembles de départ et d'arrivée de ψ sont, respectivement, $\boxed{\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[}$ et $\boxed{\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[.}$

(d) Comme $\phi\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$, $\phi(1)=0$ et $\phi(e)=e$, alors

- $\boxed{\psi\left(-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e},}$
- $\boxed{\psi(0)=1}$
- et $\boxed{\psi(e)=e.}$

Commentaires: *Pour déterminer $f^{-1}(b)$, il suffit simplement de trouver a tel que $f(a)=b$ ou le lire dans le tableau de variation de f, par exemple.*

(e) Comme réciproque d'une fonction continue, $\boxed{\psi \text{ est continue}}$ sur son ensemble de définition.

Commentaires: *Être bijectif n'entraîne pas être continue.*

(f) Par définition de $\psi=\phi^{-1}$, on a $\phi\circ\psi=id_{[-\frac{1}{e},+\infty[}$.

Or, $\forall x\in\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$, $\phi\circ\psi(x)=\phi\big(\psi(x)\big)=\psi(x)\ln(\psi(x))$ d'où

$$\boxed{\forall x\in\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[,\quad \psi(x)\ln(\psi(x))=x.}$$

(g) Sur $]-\frac{1}{e},+\infty[$, ψ est dérivable en tant que **réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée ne s'annule pas** .

Et $\forall x\in\left]-\frac{1}{e},+\infty\right[$, on a $\psi'(x)=\dfrac{1}{\phi'(\psi(x))}=\dfrac{1}{1+\ln(\psi(x))}=\dfrac{1}{1+\frac{x}{\psi(x)}}=\dfrac{\psi(x)}{x+\psi(x)}$.

Donc,

$$\boxed{\forall x\in\left]-\frac{1}{e},+\infty\right[,\quad \psi'(x)=\frac{\psi(x)}{x+\psi(x)}}$$

La fonction ϕ est dérivable sur $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$, mais sa dérivée s'annule en $\frac{1}{e}$. On ne peut donc pas y appliquer le théorème précédent.

ψ n'est donc pas dérivable $-\frac{1}{e}$ mais la courbe Γ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $-\frac{1}{e}=\phi\left(\frac{1}{e}\right)$.

Commentaires: *Reportez vous à la démonstration du théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque pour vous rappeler à quel point il est FONDAMENTAL que la dérivée de la FONCTION (et non sa réciproque) ne s'annule pas en l'image réciproque du point considéré.*

On peut voir ici la différence de comportement sur $\left]-\frac{1}{e},+\infty\right[$ et en $-\frac{1}{e}$.

(h) La fonction ψ étant dérivable sur des voisinages de 0 et e, sa courbe admet des tangentes en ces points et on a :

— $(\mathcal{D}_0)$ a pour équation $y=\psi'(0)(x-0)+\psi(0)$.

Or, $\psi(0)=1$ et $\psi'(0)=\dfrac{\psi(0)}{0+\psi(0)}=1$, d'où

$$\boxed{(\mathcal{D}_0):\ y=x+1}$$

— Par le même raisonnement avec $\psi(e) = e$ et $\psi'(e) = \dfrac{\psi(e)}{e + \psi(e)} = \dfrac{1}{2}$, on obtient également :

$$\boxed{(\mathcal{D}_e) : y = \frac{1}{2}x + \frac{e}{2}}$$

Commentaires: *Un petit commentaire sur le fait que les tangentes à la courbe de f en 1 et e sont les symétriques de celles à la courbe de f^{-1} en $1 = f^{-1}(0)$ et $e = f^{-1}(e)$ par rapport à la première bissectrice sera toujours apprécié.*