Fonctions circulaires

1 Résoudre les équations suivantes :

On fera particulièrement attention aux domaines de validité de ces équations en évitant d'aligner une succession d'égalités qui risqueraient de n'avoir aucun sens.

a) $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$.

b) $7\cosh(x) + 2\sinh(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

c) $\tan\left(3x - \dfrac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \dfrac{4\pi}{5}\right)$.

d) $\ln(x^2 - 1) + \ln(4) = \ln(4x - 1)$.

e) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

f) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+4} = 1$.

g) $\sinh(x) - 4\sinh(2x) + \sinh(3x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

h) $\arccos(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{4}\right) + \arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

2 Soit ABC un triangle, dont on note $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$, $\hat{\mathrm{C}}$ les angles.

a) Montrer que $\cos^2\left(\hat{\mathrm{A}}\right)+\cos^2\left(\hat{\mathrm{B}}\right)+\cos^2\left(\hat{\mathrm{C}}\right) = 1 \iff \cos\left(\hat{\mathrm{A}}\right)\cos\left(\hat{\mathrm{B}}\right)\cos\left(\hat{\mathrm{C}}\right) = 0$.

b) En déduire que ABC est rectangle si, et seulement si $\cos^2\left(\hat{\mathrm{A}}\right)+\cos^2\left(\hat{\mathrm{B}}\right)+\cos^2\left(\hat{\mathrm{C}}\right) = 1$.

3

a) Montrer que la fonction cosh établit une bijection entre deux intervalles de $\mathbb{R}$ à préciser.

b) Déterminer sa bijection réciproque, notée argch.

c) Montrer que argch est dérivable sur $]1\,;+\infty[$, et calculer argch'.

4

a) Montrer, pour $n, k, i \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant i \leqslant n$: $\dbinom{n}{i}\dbinom{i}{k} = \dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{n-i}$.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}$.