Fonctions circulaires

Commentaires: *J'espère que vous avez passé de bonnes vacances. N'oubliez de réviser pour le devoir de lundi. Les choses sérieuses reprennent. On va accélérer un petit peu.*

1

a)
$$\begin{aligned}\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=1 &\iff \frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)=\frac{1}{2}\\ &\iff \cos\frac{\pi}{3}\cos(x)+\sin\frac{\pi}{3}\sin(x)=\frac{1}{2}\\ &\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\\ &\iff x-\frac{\pi}{3}\equiv\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]\quad\text{ou}\quad x-\frac{\pi}{3}\equiv-\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]\\ &\iff x\equiv\frac{2\pi}{3}\quad[2\pi]\quad\text{ou}\quad x\equiv 0\quad[2\pi]\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}.}$$

b)
$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad 7\cosh(x)+2\sinh(x)=0 &\iff 7\frac{e^x+e^{-x}}{2}+2\frac{e^x-e^{-x}}{2}=0\\ &\iff 9e^x+5e^{-x}=0\end{aligned}$$

Les exponentielles réelles étant strictement positives, l'équation n'admet pas de solutions sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\mathcal{S}=\varnothing}$.

c) La fonction tan admet pour valeurs interdites tous les $\frac{\pi}{2}+p\pi$ où $p\in\mathbb{Z}$. On cherche donc des réels x tels que :

$$\begin{cases}3x-\frac{\pi}{5}\neq\frac{\pi}{2}+p\pi\\ x+\frac{4\pi}{5}\neq\frac{\pi}{2}+q\pi\end{cases}\iff\begin{cases}x\neq\frac{7\pi}{30}+p\frac{\pi}{3}\\ x\neq-\frac{3\pi}{10}+q\pi\end{cases}\qquad\text{avec }\ p,q\in\mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned}\tan\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(x+\frac{4\pi}{5}\right) &\iff 3x-\frac{\pi}{5}\equiv x+\frac{4\pi}{5}\quad[\pi]\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\quad 3x-\frac{\pi}{5}=x+\frac{4\pi}{5}+k\pi\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\quad 2x=\pi+k\pi\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\quad x=\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}\\ &\iff \exists \ell\in\mathbb{Z},\quad x=\frac{\pi}{2}\ell\qquad\text{en posant }\ell=k+1.\end{aligned}$$

Examinons si parmi ces valeurs, certaines ne sont pas interdites :

— Supposons que $\frac{\pi}{2}\ell=\frac{7\pi}{30}+\frac{\pi}{3}p$.
On aurait alors $15\ell=7+10p$ donc $5(3\ell-2p)=7$: 5 diviserait 7 ! Ce n'est pas possible.

— De même, $\frac{\pi}{2}\ell=-\frac{3\pi}{10}+p\pi$ implique $5\ell=-3+10p$, puis $5(2p-\ell)=3$: 5 diviserait 3. Ce n'est pas possible non plus.

En conclusion, aucune des valeurs trouvée n'est interdite, et toutes sont donc solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2}\ell,\ \ell \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

d — L'ensemble de résolution D de l'équation est défini par :

$$x \in \mathrm{D} \iff \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 4x - 1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \text{ ou } x < -1 \\ x > \dfrac{1}{4} \end{cases} \iff x > 1.$$

On résout donc l'équation sur $]1, +\infty[$.

— Soit $x \in]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \ln(x^2-1) + \ln(4) = \ln(4x-1) &\iff e^{\ln(x^2-1)+\ln(4)} = e^{\ln(4x-1)} \\ &\iff e^{\ln(x^2-1)} \times e^{\ln(4)} = e^{\ln(4x-1)} \\ &\iff 4(x^2-1) = 4x - 1 \\ &\iff 4x^2 - 4x - 3 = 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation admet pour solutions $\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Seule la première est dans l'ensemble de résolution. C'est donc la seule solution de l'équation initiale.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}.}$$

e On résout cette équation sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\quad 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} &\iff (2^2)^x + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \\ &\iff 2^{2x} + 2^{2x} \times 2^{-1} = 3^x \times 3^{\frac{1}{2}} + 3^x \times 3^{-\frac{1}{2}} \\ &\iff 2^{2x}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &\iff \frac{3}{2}2^{2x} = \frac{4}{\sqrt{3}}3^x \iff \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8}{3\sqrt{3}} \\ &\iff x \ln\frac{4}{3} = \ln\frac{8}{3\sqrt{3}} \iff x = \frac{\ln\frac{8}{3\sqrt{3}}}{\ln\frac{4}{3}} \\ &\iff x = \frac{3}{2} \qquad \boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}.} \end{aligned}$$

f On pose $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}$.
f est définie $[-1, +\infty[$ et strictement croissante comme somme et composée de fonctions strictement croissantes.
Par conséquent, $\forall x \in [-1, +\infty[,\quad f(x) \geqslant f(-1) = 0 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} > 1.$

L'équation n'admet pas de solutions sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$.

g On a $\forall p, q \in \mathbb{R},\quad \sinh(p) + \sinh(q) = 2\sinh\left(\frac{p+q}{2}\right)\cosh\left(\frac{p-q}{2}\right).$

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sinh(x) - 4\sinh(2x) + \sinh(3x) = 0 &\iff (\sinh(x) + \sinh(3x)) - 4\sinh(2x) = 0 \\
&\iff 2\sinh\frac{x+3x}{2}\cosh\frac{x-3x}{2} - 4\sinh(2x) = 0 \\
&\iff 2\sinh(2x)\cosh(x) - 4\sinh(2x) = 0,
\end{aligned}$$

car ch est paire.

$$\begin{aligned}
&\iff (2\cosh(x) - 4)\sinh(2x) = 0 \\
&\iff \cosh(x) = 2 \text{ ou } \sinh(2x) = 0 \\
&\iff x = \operatorname{argch}(2) \text{ ou } x = -\operatorname{argch}(2) \text{ ou } x = 0.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\operatorname{argch}(2), -\operatorname{argch}(2), 0\}}.$$

Remarque : $\begin{cases} \operatorname{argch}(2) = \ln(2+\sqrt{3}) \\ -\operatorname{argch}(2) = -\ln(2+\sqrt{3}) = \ln\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \ln(2-\sqrt{3}) \end{cases}$ *cf.* (3).

h) La fonction arccos établit une bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$:

— Si $b \in [0, \pi]$, l'équation $\arccos(x) = b$ admet une, et une seule solution qui est $x = \cos(b)$.

— Si $b \notin [0, \pi]$, l'équation $\arccos(x) = b$ n'admet pas de solution.

Ici, $b = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.

Comme $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, on a $\arccos 0 > \arccos\left(\frac{1}{4}\right) > \arccos\frac{1}{2}$ (stricte décroissance de arccos) d'où $\frac{\pi}{3} < \arccos\left(\frac{1}{4}\right) < \frac{\pi}{2}$.

De même, $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, donc $\arcsin 0 < \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{2}$ (stricte croissance de arcsin) et $0 < \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{6}$.

Par somme, $\frac{\pi}{3} < b < \frac{2\pi}{3}$, et on en déduit que l'équation donnée admet une et une seule solution donnée par :

$$\begin{aligned}
\cos b &= \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\
&= \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) - \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{9}} - \sqrt{\frac{15}{4}}\frac{1}{3} \\
&= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{15}}{12}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{15}}{12}\right\}}.$$

2 Soit ABC un triangle, dont on note $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ les angles.

On a donc $\hat{C} = \pi - \left(\hat{A} + \hat{B}\right)$.

$$\begin{aligned}
\cos^2\left(\hat{A}\right) + \cos^2\left(\hat{B}\right) + \cos^2\left(\hat{C}\right) = 1 &\iff \cos^2\left(\hat{A}\right) + \cos^2\left(\hat{B}\right) = 1 - \cos^2\left(\hat{C}\right) \\
&\iff \cos^2\left(\hat{A}\right) + \cos^2\left(\hat{B}\right) = \sin^2\left(\hat{C}\right) \\
&\iff \cos^2\left(\hat{A}\right) + \cos^2\left(\hat{B}\right) = \sin^2\left(\pi - \left(\hat{A} + \hat{B}\right)\right) \\
&\iff \cos^2\left(\hat{A}\right) + \cos^2\left(\hat{B}\right) = \sin^2\left(\hat{A} + \hat{B}\right) \\
&\iff \cos^2\left(\hat{A}\right) + \cos^2\left(\hat{B}\right) = \left(\sin\left(\hat{A}\right)\cos\left(\hat{B}\right) + \cos\left(\hat{A}\right)\sin\left(\hat{B}\right)\right)^2 \\
&\iff \cos^2\left(\hat{A}\right) + \cos^2\left(\hat{B}\right) = \sin^2\left(\hat{A}\right)\cos^2\left(\hat{B}\right) + \cos^2\left(\hat{A}\right)\sin^2\left(\hat{B}\right) \\
&\qquad\qquad + 2\sin\left(\hat{A}\right)\cos\left(\hat{A}\right)\sin\left(\hat{B}\right)\cos\left(\hat{B}\right) \\
&\iff \left(1 - \sin^2\left(\hat{B}\right)\right)\cos^2\left(\hat{A}\right) + \left(1 - \sin^2\left(\hat{A}\right)\right)\cos^2\left(\hat{B}\right) = 2\sin\left(\hat{A}\right)\cos\left(\hat{A}\right)\sin\left(\hat{B}\right)\cos\left(\hat{B}\right) \\
&\iff \cos^2\left(\hat{B}\right)\cos^2\left(\hat{A}\right) + \cos^2\left(\hat{A}\right)\cos^2\left(\hat{B}\right) = 2\sin\left(\hat{A}\right)\cos\left(\hat{A}\right)\sin\left(\hat{B}\right)\cos\left(\hat{B}\right) \\
&\iff \cos^2\left(\hat{A}\right)\cos^2\left(\hat{B}\right) - \sin\left(\hat{A}\right)\cos\left(\hat{A}\right)\sin\left(\hat{B}\right)\cos\left(\hat{B}\right) = 0 \\
&\iff \cos\left(\hat{A}\right)\cos\left(\hat{B}\right)\left(\cos\left(\hat{A}\right)\cos\left(\hat{B}\right) - \sin\left(\hat{A}\right)\sin\left(\hat{B}\right)\right) = 0 \\
&\iff \cos\left(\hat{A}\right)\cos\left(\hat{B}\right)\cos\left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 0 \\
&\iff -\cos\left(\hat{A}\right)\cos\left(\hat{B}\right)\cos\left(\hat{C}\right) = 0 \\
&\iff \cos\left(\hat{A}\right) = 0 \text{ ou } \cos\left(\hat{B}\right) = 0 \text{ ou } \cos\left(\hat{C}\right) = 0 \\
&\iff \hat{A} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \hat{B} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \hat{C} = \frac{\pi}{2} \\
&\iff \text{ABC est rectangle.}
\end{aligned}$$

La réciproque est claire.

En conclusion, $\boxed{\text{ABC est rectangle si, et seulement si } \cos^2\left(\hat{A}\right) + \cos^2\left(\hat{B}\right) + \cos^2\left(\hat{C}\right) = 1.}$

3 (a) La fonction cosh est continue strictement croissante de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$, elle y réalise donc une bijection :

$$\begin{array}{rccl} \text{argch} : & [1\,;+\infty[& \longmapsto & [0\,;+\infty[\\ & x & & \text{argch}(x) \text{ tel que } \cosh\left(\text{argch}(x)\right) = x. \end{array}$$

(b) Le calcul explicite de cette réciproque revient à résoudre, l'équation $\cosh(x) = t$.
Comme $e^x = t + \sinh(x)$. La relation $t^2 - \sinh^2(x) = 1$, entraîne alors $e^x = t + \sqrt{t^2 - 1} > 0$.
Donc,

$$\forall x \in [1\,;+\infty[, \qquad \boxed{\text{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).}$$

(c) La dérivabilité peut se montrer de deux manières :

— soit en invoquant le théorème de dérivabilité de la fonction cosh dont la dérivée sinh ne s'annule pas sur $]0\,;+\infty[= \text{argch}\,(]1\,;+\infty[)$.

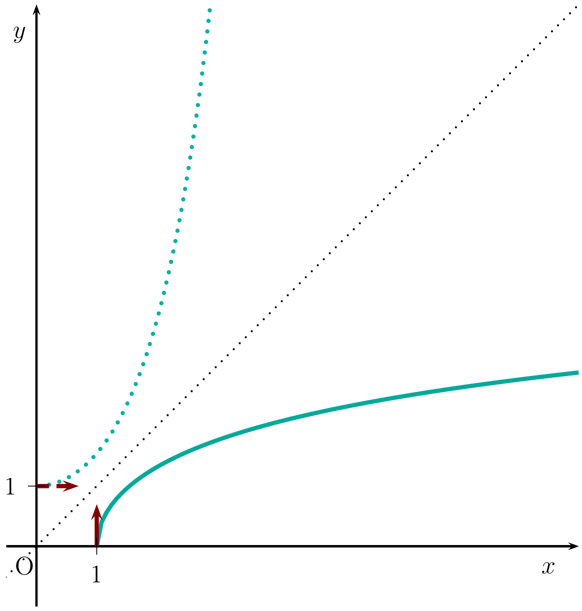
— soit en invoquant les théorèmes généraux de dérivabilité pour la composée $x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

Dans tous les cas, la fonction argch est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]1\,;+\infty[,\quad \boxed{\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.}$$

On obtient alors le tableau de variation de argch et sa courbe représentative :

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\operatorname{argch}'(x)$	$\Vert$ $\qquad$ $+$
argch	$0 \nearrow +\infty$



La fonction argch n'est pas dérivable en 1 mais sa courbe représentative y admet une demi-tangente verticale.

4 (a) Pour $n, k, i \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant i \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i!}{k!(i-k)!} = \frac{n!}{k!(n-i)!(i-k)!},$$

et

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(n-i)!(i-k)!} = \frac{n!}{k!(n-i)!(i-k)!}.$$

Donc,

$$\boxed{\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sans trop réfléchir, on applique le résultat précédent :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{n-i} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{n-k-j} \text{ en posant } j=i-k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j} \text{ par symétrie} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k} \text{ d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= 3^n \text{ par la même formule.}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} = 3^n.}$$