

Trigonométrie & Calculs Algébriques

Exercice 1 : Dans tout l'exercice, on posera $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

Pour $y \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, on pose également $x = \ln \left(\tan \left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$.

Montrer que :

$$\boxed{1} \quad \tanh \frac{x}{2} = \tan \frac{y}{2},$$

$$\boxed{2} \quad \tanh x = \sin y,$$

$$\boxed{3} \quad \cosh x = \frac{1}{\cos y}.$$

Exercice 2 : On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad \sin(4x) \sin^4(x)$$

- $\boxed{1}$ Pourquoi peut-on se contenter d'étudier la fonction f sur $[0; \pi]$?
- $\boxed{2}$ Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
- $\boxed{3}$ En déduire le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

Exercice 3 : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on note :

$$A = \sum_{0 \leq 3p \leq n} \binom{n}{3p} \quad B = \sum_{0 \leq 3p+1 \leq n} \binom{n}{3p+1} \quad C = \sum_{0 \leq 3p+2 \leq n} \binom{n}{3p+2}$$

- $\boxed{1}$ Calculer $1 + j + j^2$.
- $\boxed{2}$ Simplifier l'écriture de $(1 + j)^n$. En déduire l'expression simplifiée de $(1 + j^2)^n$.
- $\boxed{3}$ Pour $z \in \mathbb{C}$, développer l'expression $(1 + z)^n$.
- $\boxed{4}$ En remplaçant successivement z par 1, j et j^2 , en déduire un système vérifié par A, B et C.
- $\boxed{5}$ En déduire les expressions de A, B et C.