Trigonométrie & Calculs algébriques

Exercice 1 :

1. On a $\mathrm{e}^x = \tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ et donc $e^x = \dfrac{\tan\frac{y}{2}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{y}{2}\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{y}{2}}$.

   Par conséquent, $\mathrm{e}^x\left(1-\tan\dfrac{y}{2}\right) = \left(1+\tan\dfrac{y}{2}\right)$

   En isolant $\tan\dfrac{y}{2}$, on obtient : $\tan\dfrac{y}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)} = \dfrac{2\sinh\frac{x}{2}}{2\cosh\frac{x}{2}} = \tanh\dfrac{x}{2}$.

$$\boxed{\tan\left(\frac{y}{2}\right) = \tanh\left(\frac{x}{2}\right).}$$

2. En posant $\tau = \tan\dfrac{y}{2}$, on a $\sin y = \dfrac{2\tau}{1+\tau^2}$.

   Or, $\tau = \tanh\dfrac{x}{2}$.

   D'où $\sin y = \dfrac{2\tanh\frac{x}{2}}{1+\tanh^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}} = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$.

$$\boxed{\sin(y) = \tanh(x).}$$

3. De même, $\cos y = \dfrac{1-\tau^2}{1+\tau^2} = \dfrac{1-\tanh^2\frac{x}{2}}{1+\tanh^2\frac{x}{2}} = \dfrac{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\cosh x}$.

   Et donc, en passant aux inverses :

$$\boxed{\cosh(x) = \frac{1}{\cos(y)}.}$$

Exercice 2 :

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, invariant par translation et périodique de période π.
   En effet,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+\pi) = \sin(4x+4\pi)\sin^4(x+\pi) \underset{\substack{2\pi\text{-périodicité de }\sin\\ et\\ \sin(\pi+x)=-\sin(x)}}{=} \sin(4x)\big(-\sin(x)\big)^4$$
$$\underset{\substack{\text{parité de}\\ x\longmapsto x^4}}{=} \sin(4x)\sin^4(x) = f(x).$$

   Donc il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude π, par exemple $[0\,;\pi]$.
   On complétera la courbe obtenue par translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

   Commentaires:

   — *Cette question a été globalement très mal faite. Vous vous perdez en blabla. Certes, c'est la fonction sin qui transmet son imparité et sa périodicité mais inutile d'en faire des tonnes :*

   - *pour montrer une période π, on écrit simplement :*

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+\pi) = \textit{on déroule comme au-dessus}\ldots = f(x).$$

   $\mathbb{R}$ étant, en particulier, invariant par translation de vecteur $\pi\vec{\imath}$, la fonction f est donc π-périodique.

- *pour montrer une imparité, on écrit simplement :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \sin(-4x)\sin^4(-x) \underset{\substack{\text{imparité}\\ \text{de } \sin}}{=} -\sin(4x)\big(-\sin(x)\big)^4$$
$$\underset{\substack{\text{parité de}\\ x\longmapsto x^4}}{=} -\sin(4x)\sin^4(x) = -f(x).$$

$\mathbb{R}$ étant, en particulier, symétrique par rapport à l'origine, la fonction f est donc impaire.

Les histoire de symétrie et de translation ne concerne ensuite que la courbe dont on ne va tracer qu'une petite partie sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ comme demandée. Se pose alors la question de savoir comment retrouver TOUTE la courbe de f sur $\mathbb{R}$ et c'est là que l'on écrit « on complètera la courbe par des translations de vecteurs $k\pi\vec{\imath}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. »

Si vous avez montré la π-périodicité, il n'y a pas besoin de compléter avec la symétrie de centre O.

— *La fonction étant également impaire, on pourrait réduire encore le domaine d'étude à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et compléter la courbe par symétrie de centre O, puis par translations de vecteurs $k\pi\vec{\imath}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.*

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables et

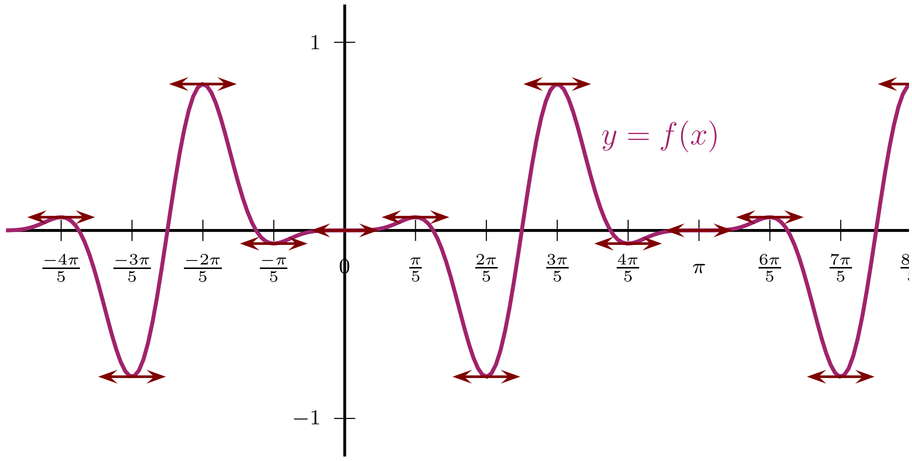
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) &= 4\cos(4x)\sin^4(x) + 4\sin(4x)\cos(x)\sin^3(x)\\ &= 4\sin^3(x)\big[\cos(4x)\sin(x) + \sin(4x)\cos(x)\big]\\ &= 4\sin^3(x)\sin(4x+x)\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 4\sin^3(x)\sin(5x).}$$

3. Comme $\sin(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [0\,;\pi]$, $f'(x)$ est du signe de $\sin(5x)$ sur $[0\,;\pi]$ et le tableau de variation de f s'écrit alors :

x	0		$\frac{\pi}{5}$		$\frac{2\pi}{5}$		$\frac{3\pi}{5}$		$\frac{4\pi}{5}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
f	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{3\pi}{5}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{4\pi}{5}\right)$	$\nearrow$	0



Exercice 3 :

1. Plusieurs manières de faire dont le calcul direct en remarquant que $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$:

$$1 + j + j^2 = \sum_{k=0}^{2} j^k = \frac{1-j^3}{1-j} = 0.$$

2. Comme $1 + j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}$, on a :

$$(1+j)^n = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}.$$

D'après 1, $1 + j^2 = -j = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$.
D'où, $(1+j^2)^n = \left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)^n = e^{-i\frac{n\pi}{3}}$.

Commentaires: *On pouvait aussi remarquer que $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{j}$.*
D'où $(1+j^2)^n = (1+\overline{j})^n = \overline{(1+j)^n} = \overline{e^{i\frac{n\pi}{3}}} = e^{-i\frac{n\pi}{3}}$ par compatibilité du conjugué avec la somme et le produit.

3. D'après la formule du binôme, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ (1+z)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p$$

Les entiers de la forme $3p$, $3p+1$ et $3p+2$ formant une partition de $\mathbb{N}$, on peut décomposer cette somme :

$$= \sum_{0\leqslant 3p\leqslant n} \binom{n}{3p} z^{3p} + \sum_{0\leqslant 3p+1\leqslant n} \binom{n}{3p+1} z^{3p+1} + \sum_{0\leqslant 3p+2\leqslant n} \binom{n}{3p+2} z^{3p+2}$$

4. En remplaçant successivement z par 1, j et j^2 dans l'expression précédente et en utilisant le fait que $j^3 = 1$, A, B et C sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{A} & + & \mathrm{B} & + & \mathrm{C} & = & 2^n \\
\displaystyle\sum_{0\leqslant 3p\leqslant n} \binom{n}{3p} j^{3p} & + & \displaystyle\sum_{0\leqslant 3p+1\leqslant n} \binom{n}{3p+1} j^{3p+1} & + & \displaystyle\sum_{0\leqslant 3p+2\leqslant n} \binom{n}{3p+2} j^{3p+2} & = & (1+j)^n \\
\displaystyle\sum_{0\leqslant 3p\leqslant n} \binom{n}{3p} (j^2)^{3p} & + & \displaystyle\sum_{0\leqslant 3p+1\leqslant n} \binom{n}{3p+1} (j^2)^{3p+1} & + & \displaystyle\sum_{0\leqslant 3p+2\leqslant n} \binom{n}{3p+2} (j^2)^{3p+2} & = & (1+j^2)^n
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{A} & + & \mathrm{B} & + & \mathrm{C} & = & 2^n \\
\displaystyle\sum_{0\leqslant 3p\leqslant n} \binom{n}{3p} (j^3)^p & + & j\displaystyle\sum_{0\leqslant 3p+1\leqslant n} \binom{n}{3p+1} (j^3)^p & + & j^2\displaystyle\sum_{0\leqslant 3p+2\leqslant n} \binom{n}{3p+2} (j^3)^p & = & (1+j)^n \\
\displaystyle\sum_{0\leqslant 3p\leqslant n} \binom{n}{3p} (j^3)^{2p} & + & j^2\displaystyle\sum_{0\leqslant 3p+1\leqslant n} \binom{n}{3p+1} (j^3)^{2p} & + & j^4\displaystyle\sum_{0\leqslant 3p+2\leqslant n} \binom{n}{3p+2} (j^3)^{2p} & = & (1+j^2)^n
\end{array}\right.$$

Avec $j^3 = 1$ et $j^4 = j$, on obtient finalement :

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{A} & + & \mathrm{B} & + & \mathrm{C} & = & 2^n \\
\mathrm{A} & + & j\mathrm{B} & + & j^2\mathrm{C} & = & e^{i\frac{n\pi}{3}} \\
\mathrm{A} & + & j^2\mathrm{B} & + & j\mathrm{C} & = & e^{-i\frac{n\pi}{3}}
\end{array}\right.$$

5 D'après 1 , $1+j+j^2=0$. En sommant les lignes du système précédent, on a :

$$A=\frac{1}{3}\left(2^n+e^{i\frac{n\pi}{3}}+e^{-i\frac{n\pi}{3}}\right)=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).$$

En multipliant la deuxième ligne par j^2, la troisième par j et en sommant les lignes, on a encore :

$$\begin{aligned}B&=\frac{1}{3}\left(2^n+j^2e^{i\frac{n\pi}{3}}+je^{-i\frac{n\pi}{3}}\right)=\frac{1}{3}\left(2^n+e^{i\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}+e^{-i\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)\right).\end{aligned}$$

Enfin, multipliant la deuxième ligne par j, la troisième par j^2 et en sommant les lignes, on obtient :

$$\begin{aligned}C&=\frac{1}{3}\left(2^n+je^{i\frac{n\pi}{3}}+j^2e^{-i\frac{n\pi}{3}}\right)=\frac{1}{3}\left(2^n+e^{i\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}+e^{-i\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right).\end{aligned}$$