Fonctions

Exercice 1 : Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

— **Initialisation :** Si $n=1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$.

D'autre part $1 - \dfrac{1}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{2!} = \dfrac{1}{2}$.

La formule est donc vraie pour $n=1$.

— **Hérédité :** Supposons que la formule soit vraie pour un certain entier n non nul. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}\right) + \frac{n+1}{(n+1+1)!}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$:

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}\\
&= 1 - \left(\frac{n+2}{(n+2)!} - \frac{n+1}{(n+2)!}\right)\\
&= 1 - \frac{1}{(n+2)!}.
\end{aligned}$$

La formule est encore vraie au rang suivant $n+1$. Elle est héréditaire.

— **Conclusion :** Héréditaire et initialisée à partir de $n=1$, la relation est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

Commentaires: *Dans le calcul de $-\dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{n+1}{(n+2)!}$, il y a mieux que $(n+2)!(n+1)!$ comme dénominateur commun !*

Exercice 2 :

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Comme $\dfrac{k}{k+1} \in [0\,;1[$ alors $0 \leqslant \arctan\left(\dfrac{k}{k+1}\right) < \dfrac{\pi}{4}$.

Pour les mêmes raisons, $\dfrac{k-1}{k} \in [0\,;1[\implies 0 \leqslant \arctan\left(\dfrac{k-1}{k}\right) < \dfrac{\pi}{4}$ ou encore $-\dfrac{\pi}{4} < -\arctan\left(\dfrac{k-1}{k}\right) \leqslant 0$.

En sommant membres à membres ces inégalités, on a :

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Commentaires: *On ne peut pas soustraire des inégalités. Seulement additionner ! Pour ce faire, il est nécessaire de multiplier tous les membres d'une de ces inégalités par -1... et changer le sens de celle-ci !*

L'exercice était gentil et vous laissait beaucoup de latitude. Cela l'aurait été beaucoup moins si on vous avez demandé de prouver que $\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$.

En conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[.}$$

2. D'après la question précédente, on peut calculer :

$$\begin{aligned}
\tan\left(\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right) &= \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)\right) - \tan\left(\arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)}{1+\tan\left(\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)\right)\tan\left(\arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)} \\
&= \frac{\dfrac{k}{k+1} - \dfrac{k-1}{k}}{1+\dfrac{k}{k+1}\times\dfrac{k-1}{k}} \\
&= \frac{\dfrac{\cancel{k^2} - (\cancel{k^2}-1)}{\cancel{k(k+1)}}}{\dfrac{2k^2}{\cancel{k(k+1)}}} = \frac{1}{2k^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\arctan\dfrac{k}{k+1} - \arctan\dfrac{k-1}{k}$ est l'angle de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut $\dfrac{1}{2k^2}$ *i.e.*

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right).}$$

Commentaires:
- *Non ! $\tan$ n'est pas compatible avec l'addition et il faut se battre un peu pour calculer $\tan(a+b)$.*
- *Sans la première question, nous n'aurions pas l'égalité mais seulement l'égalité modulo π.*

3. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)
\end{aligned}$$

On reconnaît une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
&= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan(0) \\
&= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4}$.
D'après les théorèmes sur les limites de composées, on obtient donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \frac{\pi}{4}}.$$

Commentaires: *On note* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Remarquez que l'on peut très bien avoir $\lim\limits_{k\to+\infty} \arctan\left(\dfrac{1}{2k^2}\right) = 0$ *sans que la limite de la somme soit nulle. Nous verrons que la convergence du terme général vers* 0 *n'est qu'une condition nécessaire à la convergence de la série.*

Exercice 3 :

1. La fonction arcsin n'est définie que sur $[-1\,;1]$ donc $x \in \mathcal{D} \iff \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in [-1, 1]$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| < 1$.

On a donc bien $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}]-1\,;1[\subset [-1\,;1]$ pour tout x réel *i.e.* f est définie sur $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}}$.

Commentaires: *Lorsque l'on considère des composées de la forme* $\mathrm{F} : x \longmapsto u(x) \longmapsto f\big(u(x)\big)$, *il est très important de regarder le domaine de définition de* u *certes, mais aussi son ensemble de valeurs et l'on se restreindra à celles pour lesquelles* $u(x)$ *appartient au domaine de définition de* f :

$$\mathcal{D}_\mathrm{F} = \mathcal{D}_u \cap \{x \in \mathcal{D}_u \,/\, u(x) \in \mathcal{D}_f\}\,.$$

2. Pour tout x réel, $x^2+1 > 0$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, d'après précédemment, à valeurs dans $]-1\,;1[$, intervalle sur lequel arcsin est également dérivable.

On en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}} = \frac{1}{x^2+1}.$$

$$\text{Donc,} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\, f'(x) = \frac{1}{x^2+1}.}$$

3. D'après la question précédente, f est donc une primitive de $\dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ *i.e.*

$$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \arctan(x) + k.$$

Pour $x = 0$ en particulier, on a $f(0) = \arcsin(0) = 0$ et $\arctan(0) = 0$ donc $k = 0$.

$$\text{Donc,} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan(x).}$$

Commentaires: *L'égalité* $f' \equiv g'$ *sur un intervalle prouve seulement que* $f \equiv g + k$ *sur cet intervalle avec* $k \in \mathbb{R}$.

4 $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in \,]-1\,;1[$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[. \tag{V.1}$$

Il est donc légitime de calculer $\tan\left(\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) = \frac{\sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)}{\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)}$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}}$$

$$\text{Donc,}\quad \tan\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) = x. \tag{V.2}$$

D'après (V.1) et (V.2), $\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ est l'angle de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x. C'est $\arctan(x)$.

En conclusion, on retrouve $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan(x).}$

Commentaires: *Montrer que* $\tan\left(\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) = x$ *prouve seulement que*

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \equiv \arctan(x) \ [\pi].$$

Exercice 4 :

1 $\forall x \in \,]0\,;\pi[$, $\sin(x) \neq 0$ donc f est correctement définie sur I.
Comme f est impaire, le comportement de f sur $]-\pi\,;\pi[$ se déduit de celui sur I par symétrie centrale.
Enfin, la fonction f admet 2π comme période. Par translations de vecteurs $2k\pi\overrightarrow{\imath}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on en déduira donc le comportement de f sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi\,;(k+1)\pi[$.
L'intervalle I est donc bien un domaine minimal d'étude pour f

2 Sur I, $\sin(x) \geqslant 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin(x) = 0$. D'après les théorèmes sur les limites des inverses, on a donc :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty.}$$

La courbe de f admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote.

De même, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} \sin(x) = 0$ par valeurs positives sur I entraîne :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} f(x) = +\infty.}$$

La courbe de f admet donc la droite d'équation $x = \pi$ comme asymptote ainsi que toutes les droites d'équation $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : Si cela avait été au programme, on aurait remarqué que $f(\pi - x) = f(x)$ *i.e.* que la courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$. La limite en π^- se déduit alors de celle en 0^+.

3 Connaissant les variations de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ et celles de sin sur I, il est tout à fait inutile de chercher le signe de la dérivée de f. Les théorèmes sur les composées de fonctions monotones suffisent :

- Sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, f est la composée d'une fonction décroissante et d'une fonction croissante donc f est décroissante.
- Sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, f est la composée d'une fonction décroissante et d'une fonction décroissante donc f est croissante.

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4 Sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, f est la composée de la fonction sinus, strictement croissante par la fonction inverse, strictement décroissante. Elle est donc strictement décroissante de $\mathrm{I}_1 = \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\,;\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)\right[= [1\,;+\infty[$.

Comme inverse d'une fonction continue et ne s'annulant pas sur I_1, f y est également continue.

D'après le théorème de la bijection, continue et strictement monotone, la fonction f établit donc une $\boxed{\text{bijection de } \mathrm{I}_1 = \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \text{ sur } \mathrm{J}_1 = [1\,;+\infty[.}$

5 Posons $a \in \mathrm{I}_1 = \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $b \in \mathrm{J}_1 = [1, +\infty[$.

$$a = f^{-1}(b) \iff b = f(a) \iff b = \frac{1}{\sin(a)} \iff \sin(a) = \frac{1}{b}\ (\in [-1\,;1])$$
$$\iff a = \arcsin\left(\frac{1}{b}\right) \quad \text{ou} \quad a = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{b}\right).$$

Comme $0 < a \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, un seul choix subsiste : $a = \arcsin\left(\dfrac{1}{b}\right)$.

$$\text{Ainsi, } \boxed{\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [1\,;+\infty[& \longmapsto & \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \\ & x & & \arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}}$$

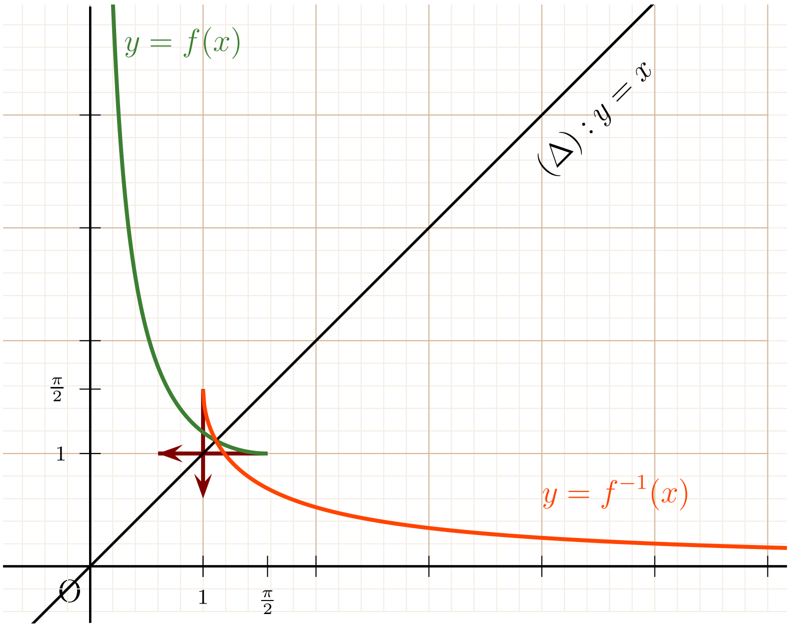
6 Comme fonction réciproque d'une fonction strictement décroissante, f^{-1} est strictement décroissante sur $J_1 = [1\,;+\infty[$.

7 En $\dfrac{\pi}{2} = f^{-1}(1)$, la fonction f admet un minimum local donc $\dfrac{\pi}{2}$ est un point critique *i.e.* $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

La fonction f^{-1} n'est donc pas dérivable en $1 = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ mais sa courbe représentative y admet une tangente verticale.

Commentaires: *Il aurait été beaucoup plus marrant de chercher s'il existait une tangente commune aux deux courbes.*

8



Exercice 5 :

1 a. 1 et -1 sont des racines triviales de P donc P peut se mettre sous la forme : $P(x) = (x+1)(x-1)(ax^2 + bx + c)$.
Rapidement, par identification, on trouve $a = -1$ et $c = -1$.
D'où, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+1)(x-1)(-x^2 + bx - 1)$.
Afin de trouver b, identifions les coefficients de x, par exemple :

$$-2x = x \times (-1) \times (-1) + 1 \times x \times (-1) + 1 \times (-1) \times bx \implies -2 = -b.$$

Donc, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+1)(x-1)(-x^2+2x-1) = -(x+1)(x-1)(x^2-2x+1)$

Donc, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\boxed{P(x) = -(x+1)(x-1)^3.}$

b. f est définie si, et seulement si $P(x) \geqslant 0$.
Or, $P(x) = (x-1)^2 \times (x+1)(1-x)$ est du signe de $1 - x^2$ trinôme du second degré de coefficient dominant négatif dont les racines sont -1 et 1.
On en déduit le tableau de signes pour P :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc, $\boxed{\mathcal{D}_f = [-1\,;1].}$

Commentaires: *Non ! Non ! et NON ! un produit n'est pas positif seulement lorsque ses facteurs sont positifs. Vous devez savoir ça depuis la 5e ! C'est très pénible de voir encore ce genre d'erreurs un nombre incalculable de fois.*

L'unique méthode fiable, claire, concise, efficace, simple et de construire un tableau de signes. Persistez à faire autrement, continuez à faire faux !

2 (a) Sur $]-1\,;1[$, P prend des valeurs strictement positives donc f, composée de fonctions dérivables est dérivable et on a :

$$\forall x \in\,]-1\,;1[\,,\quad f'(x) = \frac{\mathrm{P}'(x)}{2\sqrt{\mathrm{P}(x)}} = \frac{-2x^3+3x^2-1}{\sqrt{-(x+1)(x-1)^3}} = \frac{-(x-1)^2(2x+1)}{-(x-1)\sqrt{-(x+1)(x-1)}}$$

.

$$\boxed{\forall x \in\,]-1\,;1[\,,\quad f'(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{-(x+1)(x-1)}}.}$$

Commentaires: *Pour aider à la factorisation de P' et trouver la racine 1, on saura bientôt démontrer que α est racine double de P si, et seulement si α est racine simple de P'.*

(b) $f(-1) = 0$ et $\forall x \in [-1\,;1]$, $x+1 \geqslant 0$ donc $x+1 = \sqrt{(x+1)^2}$. On en déduit :

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{\sqrt{-(x-1)^3(x+1)}}{x+1} = \sqrt{-(x-1)^3} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Or, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1} \sqrt{x+1} = 0 \text{ par valeurs positives} \\ \forall x \in [-1\,;1[\,,\quad \sqrt{-(x-1)^3} > 0. \end{cases}$

Donc, $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty$. En conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty}$$

La fonction f n'est pas dérivable en -1 mais sa courbe admet au point d'abscisse -1 une demi-tangente verticale.

(c) Rapidement, par le même raisonnement on a successivement :

$$\begin{aligned} \forall x \in\,]-1\,;1]\,,\quad \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \frac{\sqrt{-(x-1)^3(x+1)}}{x-1} \\ &= \frac{\sqrt{-(x-1)^2(x-1)(x+1)}}{x-1} \\ &= \frac{|x-1|\sqrt{-(x-1)(x+1)}}{x-1} \\ &= -\sqrt{-(x-1)(x+1)} \quad \text{car } |x-1| = -(x-1) \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{-(x-1)(x+1)} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0.}$

La fonction f est dérivable en 1 et $\boxed{f'(1) = 0.}$ La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente d'équation $y = 0$.

Commentaires: *Si jamais vous vous demandiez si la composée de deux fonctions dérivables est dérivable cet exercice vous donne la réponse. En effet :*

— *En -1, la composée de P dérivable et la racine non dérivable en $\mathrm{P}(-1) = 0$. La fonction f est, comme attendu, non dérivable en -1.*

— *Cependant, en 1, la fonction f est toujours la composée de la fonction P (dérivable) et de la fonction racine non dérivable en $\mathrm{P}(1) = 0$. La fonction f est pourtant dérivable en 1.*

Moralité : *Tout peut donc se produire lorsqu'on considère la composée d'une fonction dérivable et d'une fonction non dérivable.*

3 (a) D'après 2.(a), sur $]-1\,;1[$, $f'(x)$ est du signe de $(x-1)(2x+1)$ donc de $-(2x+1)$ sur $]-1\,;1[$ car $x - 1 < 0$.

On en déduit le tableau de variation de f :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0
f	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

(b)