Nom: .... **Prénom:** ....

Fonctions

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Il est demandé d'encadrer les résultats des calculs et de numéroter les copies.
Aucun document n'est autorisé.

L'utilisation des calculatrices et de tout matériel électronique est interdite.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur la copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre

Exercice 1 : Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

Exercice 2 :

1. Montrer que, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\arctan\left(\dfrac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\dfrac{k-1}{k}\right) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\arctan\left(\dfrac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\dfrac{k-1}{k}\right)$.
3. En déduire la limite de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

Exercice 3 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression simple de f.
4. Retrouver ce résultat par une méthode directe.

Exercice 4 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

1. Justifier que $\mathrm{I} =]0\,;\pi[$ est un domaine d'étude minimal de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de I.
3. Dresser le tableau de variations de f sur I.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathrm{I}_1 = \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J_1 à déterminer.
5. Expliciter l'application réciproque f^{-1} de f.
6. Déterminer les variations de f^{-1} sur $[1\,;+\infty[$.
7. La fonction f^{-1} est-elle dérivable en 1 ? Justifier.
8. Sur un même graphique donné en annexe, tracer soigneusement la droite (Δ) d'équation $y = x$, la courbe représentative de f sur I_1 et sa tangente en $\dfrac{\pi}{2}$ ainsi que la courbe représentative de f^{-1} sur J_1 et sa tangente en 1.

Exercice 5 : On considère la fonction

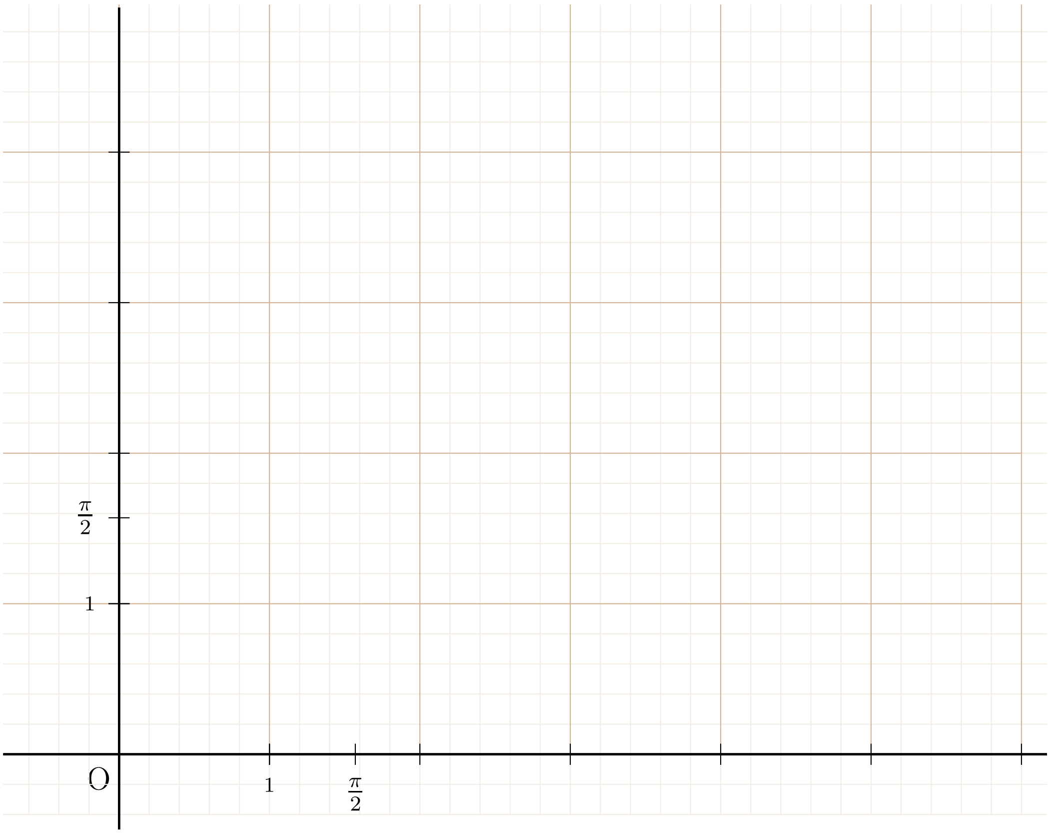
$$f : x \longmapsto \sqrt{\mathrm{P}(x)} \quad \text{où} \quad \mathrm{P}(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x + 1.$$

1. (a) Justifier soigneusement que, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(x) = -(x+1)(x-1)^3$.
   (b) En déduire le domaine de définition de la fonction f.
2. (a) Justifier que f est dérivable sur $]-1\,;1[$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour $x \in]-1\,;1[$.
   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$. Que peut-on en déduire quant à la dérivabilité de f en -1 ?
   (c) Étudier de même la dérivabilité de f en 1.
3. (a) Dresser le tableau de variation de f.
   (b) Tracer soigneusement la courbe de la fonction f sur le graphique donné en annexe. **Aide :** On n'oubliera pas de commencer par tracer les tangentes principales.

Lors d'un grand jeu télévisé, les trois concurrents se trouvent être un ingénieur, un physicien et un mathématicien.
Ils ont une épreuve à réaliser. Cette épreuve consiste à construire une clôture tout autour d'un troupeau de moutons en utilisant aussi peu de matériel que possible.
- L'ingénieur fait regrouper le troupeau dans un cercle, puis décide de construire une barrière tout autour.
- Le physicien construit une clôture d'un diamètre infini et tente de relier les bouts de la clôture entre eux jusqu'au moment où tout le troupeau peut encore tenir dans le cercle.
- Voyant ça, le mathématicien construit une clôture autour de lui-même et se définit comme étant à l'extérieur.

ANNEXE

Exercice 4 :



Exercice 5 :