Intégrales de Wallis

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \; dt$.

1 Relation de récurrence

(a) Calculer W_0, W_1, et W_2.

(b) Prouver par un changement de variable que $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \; dt$.
Retrouver le résultat de W_2 sans calculs compliqués.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
Donner W_3, W_4 et W_5.

2 Limite de $\dfrac{W_{n+1}}{W_n}$

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\quad \sin^{n+2} t \leqslant \sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$.
En déduire que $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$.

(b) Justifier que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

3 Expression de W_{2p} et W_{2p+1}

(a) Démontrer que pour $p \in \mathbb{N}$, $\quad W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.

(b) Déterminer une formule similaire pour W_{2p+1}.

4 Formule de Wallis [1]

(a) Simplifier pour $p \in \mathbb{N}$, l'expression de $\dfrac{W_{2p+1}}{W_{2p}}$.

(b) En déduire la FORMULE DE WALLIS :

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} \frac{2^{4p} p!^4}{(2p)!^2 p} = \pi.}$$

[1]. John Wallis (**1616** Ashford - **1703** Oxford)
On lui doit le symbole ∞ introduit dans son ouvrage *De sectionibus conicis tractatus*, 1656