Intégrales de Wallis

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ \mathrm{d}t$.

1 Relation de récurrence

(a) On a $\boxed{\mathrm{W}_0 = \frac{\pi}{2},}$ et $\boxed{\mathrm{W}_1 = 1.}$

$\mathrm{W}_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin(2t)}{2}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ donc $\boxed{\mathrm{W}_2 = \frac{\pi}{4}.}$

(b) Posons $x = \frac{\pi}{2} - t$. La fonction $t \longmapsto \frac{\pi}{2} - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, et on a $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$.

Par changement de variable,

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ \mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ (-\,\mathrm{d}x) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t.}$$

$2\mathrm{W}_2 = \mathrm{W}_2 + \mathrm{W}_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t) + \sin^2(t))\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$

On retrouve, $\boxed{\mathrm{W}_2 = \frac{\pi}{4}.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\mathrm{W}_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n+1}(t)\ \mathrm{d}t.$

Les fonctions $t \longmapsto -\cos(t)$ et $t \longmapsto \sin^{n+1}(t)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, une intégration par parties s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_{n+2} &= \cancel{\left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(t))[(n+1)\cos(t)\sin^n(t)]\ \mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)\ \mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)\ \mathrm{d}t \\
&= (n+1)\big(\mathrm{W}_n - \mathrm{W}_{n+2}\big)
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \boxed{(n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n.}$$

Par conséquent :

- $3\mathrm{W}_3 = 2\mathrm{W}_1$ donc $\mathrm{W}_3 = \dfrac{2}{3}$.
- $4\mathrm{W}_4 = 3\mathrm{W}_2$ donc $\mathrm{W}_4 = \dfrac{3\pi}{16}$.
- $5\mathrm{W}_5 = 4\mathrm{W}_3$ donc $\mathrm{W}_5 = \dfrac{8}{15}$.

On résume les valeurs connues dans un tableau :

n	0	1	2	3	4	5
W_n	$\dfrac{\pi}{2}$	1	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{3\pi}{16}$	$\dfrac{8}{15}$

2 Limite de $\dfrac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_n}$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\forall t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, on a :

$$\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ \sin^{n+2}(t) \leqslant \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t).$$

Commentaires: *La suite d'inégalité n'est pas due à la croissance de la fonction* $\sin$ *mais à la décroissance de la suite* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour* $x \in [0\,;1]$ *:*

Si $x \in \mathbb{R}_+$ *alors* $x^n \leqslant x^{n+1} \iff 0 \leqslant \underbrace{x^n}_{\geqslant 0}(x-1) \iff 1 \leqslant x$.

Par croissance de l'intégrale $\left(\text{avec } 0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$, on en déduit que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n}(t)\ \mathrm{d}t$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathrm{W}_{n+2} \leqslant \mathrm{W}_{n+1} \leqslant \mathrm{W}_n}$$

b) $\forall t \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) > 0$ donc $\mathrm{W}_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

À partir des inégalités précédentes, on obtient alors :

$\forall n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{\mathrm{W}_{n+2}}{\mathrm{W}_n} \leqslant \dfrac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_n} \leqslant 1$, i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_n} \leqslant 1$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_n} = 1.}$$

3 Expression de W_{2p} et W_{2p+1}

a) Montrons ce résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

D'après les questions précédentes, on a $\mathrm{W}_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{2^0(0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ donc l'expression est valide pour $p = 0$.

Supposons que ce soit le cas pour un certain $p \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\mathrm{W}_{2p+2} \underset{1.c}{=} \frac{2p+1}{2p+2}\mathrm{W}_{2p} \underset{\text{H.R}}{=} \frac{2p+1}{2(p+1)}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}\big((p+1)!\big)^2}\frac{\pi}{2}.$$

La propriété est également héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{W}_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}.}$$

(b) Au brouillon, on constate que
$$\begin{aligned}\mathrm{W}_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1}\mathrm{W}_{2p-1} = \frac{2p(2p-2)}{(2p+1)(2p-1))}\mathrm{W}_{2p-3}\\ &= \frac{2p(2p-2)\cdots 4\times 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3\times 1)}\mathrm{W}_1\\ &= \frac{[2p(2p-2)\cdots 4\times 2]^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)\cdots 3\times 2\times 1)}\times 1\\ &= \frac{[2^p p!]^2}{(2p+1)!}.\end{aligned}$$
On démontrerait alors de même que précédemment par récurrence que :

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{W}_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.}$$

4 Formule de Wallis

(a) Il suffit d'utiliser les expressions trouvées à la question 3 : $\forall\, p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\mathrm{W}_{2p+1}}{\mathrm{W}_{2p}} = \frac{\frac{2^{2p}p!^2}{(2p+1)!}}{\frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\frac{\pi}{2}} = \frac{2^{2p}p!^2}{(2p+1)!}\times\frac{2^{2p}p!^2}{(2p)!}\times\frac{2}{\pi} = \frac{2^{4p}p!^4}{(2p+1)\times(2p)!^2}\times\frac{2}{\pi}.$$

(b) On en déduit la FORMULE DE WALLIS en réordonnant les résultats précédents et en faisant apparaître les quantités qui nous intéressent dont $\dfrac{\mathrm{W}_{2p+1}}{\mathrm{W}_{2p}}$ et π :

$$\begin{aligned}\frac{2^{4p}p!^4}{(2p)!^2 p} &= \frac{2^{4p}p!^4}{(2p+1)(2p)!^2}\times\frac{2p+1}{p} = \left(\frac{2^{4p}p!^4}{(2p+1)(2p)!^2}\times\frac{2}{\pi}\right)\times\frac{2p+1}{2p}\times\pi\\ &= \frac{\mathrm{W}_{2p+1}}{\mathrm{W}_{2p}}\times\frac{2p+1}{2p}\times\pi.\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\frac{\mathrm{W}_{2p+1}}{\mathrm{W}_{2p}} = \lim_{p\to+\infty}\frac{2p+1}{2p} = 1$, d'après les théorèmes sur les limites de produits, on obtient finalement :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\frac{2^{4p}p!^4}{(2p)!^2 p} = \pi.}$$