Intégration & Nombres Complexes

Exercice 1 : Calculer les primitives suivantes en précisant leur domaine d'intégration :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$
2. $\displaystyle\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$
3. $\displaystyle\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+t+1)^2}$

Exercice 2 : Pour tout entier naturel k, on note

$$\mathrm{I}_k = \int_0^1 \frac{(1-x)^k}{k!}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Montrer que, pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a $0 \leqslant (1-x)^k\,\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$.
   (b) En déduire que la suite (I_k) converge vers 0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{I}_k = -\dfrac{1}{k!}+\mathrm{I}_{k-1}$.
3. En faisant apparaitre une somme télescopique, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}$.

Exercice 3 : On considère l'application $f : z \longmapsto \dfrac{z+i}{z-2}$.

1. Déterminer :
   (a) un nombre complexe a n'ayant pas d'image par f ;
   (b) un nombre complexe b n'ayant pas d'antécédent par f.
   On notera désormais $\mathrm{E} = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ et $\mathrm{F} = \mathbb{C} \setminus \{b\}$
2. Montrer que :
   (a) f est définie sur E;
   (b) tout nombre complexe de F admet un, et un seul antécédent par f dans E.
3. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{U})$.
4. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.