Intégration & Nombres Complexes

Exercice 1 : Toutes les primitives sont trouvées à une constante près.

Comme $1+t+t^2>0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, les fonctions $t\longmapsto \dfrac{1}{t^2+t+1}$, $t\longmapsto \dfrac{t}{t^2+t+1}$ et $t\longmapsto \dfrac{t}{(t^2+t+1)^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème fondamental, elles admettent des primitives sur tout sous-intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarque : $t^2+t+1=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}\left(\left(\dfrac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right)=\dfrac{3}{4}\left(\left(\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$.

Commentaires: *Un petit mot glissé quelque part sur la continuité des intégrandes même vite fait en disant juste que le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ sera toujours apprécié à sa juste valeur.*

1.
$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}=\int^x\frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\int^x\frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

2.
$$\int^x\frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+t+1}=\frac{1}{2}\int^x\frac{2t+1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int^x\frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

3.
$$\int^x\frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+t+1)^2}=\frac{1}{2}\int^x\frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int^x\frac{1}{(t^2+t+1)^2}\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{8}{9}\int^x\frac{\mathrm{d}t}{\left(\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)^2}.$$

Concentrons-nous sur la seconde intégrale :

En posant $\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}=\tan(\theta)$, on a $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t=\big(1+\tan^2(\theta)\big)\mathrm{d}\theta$ et l'intégrale devient :

$$\int^x\frac{\mathrm{d}t}{\left(\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\int^\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\tan^2(\theta)+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\int^\theta\cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int^\theta 1+\cos(2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}\theta+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin(2\theta)$$

Comme $\sin(2\theta) = \dfrac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$, on obtient finalement :

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{16}\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

En conclusion,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+t+1)^2} = -\frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= -\frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Exercice 2 :

1 (a) Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a $0 \leqslant 1-x \leqslant 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto x^k$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, en particulier, sur $[0\,;1]$ donc, en composant :

$$0 \leqslant (1-x)^k \leqslant 1^k = 1. \tag{VIII.1}$$

Commentaires: *Par rapport au devoir précédent, ici, la conservation des inégalités n'a rien à voir avec la décroissance de la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0\,;1]$.*

Par ailleurs, la fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors

$$0 < 1 = \mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \tag{VIII.2}$$

Les inéquations (VIII.1) et (VIII.2) sont positives. On peut les multiplier membre à membre et il s'ensuit que, pour tout réel $x \in [0\,;1]$,

$$0 \leqslant (1-x)^k\,\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}.$$

Commentaires: *Ne pas oublier de vérifier que les inéquations sont positives et de même sens.*

(b) Par croissance de l'intégrale, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on peut écrire en utilisant la double inégalité précédente,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{(1-x)^k}{k!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}}{k!}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{k!} \iff 0 \leqslant \mathrm{I}_k \leqslant \frac{\mathrm{e}}{k!}.$$

Or, $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k!} = 0$, donc, grâce au théorème d'encadrement, il vient

$$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{I}_k = 0.$$

Commentaires:

— *Le principal argument à ne pas oublier et la croissance de l'intégrale.*

— *Si une primitive de la fonction nulle peut être une constante non nulle, son intégrale sur tout segment sera toujours nulle.*

— *Le passage à la limite ne peut se faire qu'une fois l'intégrale encadrée. On ne sait pas encore sous quelles conditions on peut ou pas intervertir les limites et le symbole* $\int$. *Vous verrez que ce n'est pas si facile (même si ici, pour le coup, cette interversion était valide sans que vous ne puissiez le justifier). Patientez encore un peu.*
C'est un peu comme si vous aviez confondu $f'(a)$, *le nombre dérivée de* f *en* a *avec* $\left(f(a)\right)' = 0$.

— *C'est le théorème d'encadrement qui nous permet de triompher de la question mais ne le sous-estimez pas !*
En effet, celui-ci ne se résume pas seulement à $0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n!}$.
Avant de parler d'encadrement des limites, le théorème d'encadrement prouve que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et donc que sa limite existe. Ceci est un résultat qualitatif bien plus fort. À méditer !*

2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{(1-x)^k}{k!}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$, on peut intégrer I_k par parties :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_k &= \int_0^1 \frac{(1-x)^k}{k!}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1-x)^k}{k!}\,\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-(1-x)^{k-1}}{(k-1))!}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k!} + \mathrm{I}_{k-1}.\end{aligned}$$

Commentaires: *Je vous rappelle qu'aucun professeur de mathématiques n'appréciera que vous manipuliez des objets sans avoir prouvé leur existence. De même qu'il faut justifier la dérivabilité d'une fonction avant de calculer sa dérivée, il faut justifier que les fonctions sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *afin de procéder à une intégration par parties. Gâteau sur la cerise, pensez à préciser sur quel intervalle.*

3 Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on peut réécrire grâce à la question précédente

$$\frac{1}{k!} = \mathrm{I}_{k-1} - \mathrm{I}_k.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{I}_{k-1} - \mathrm{I}_k) = 1 + \mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_n.$$

Par ailleurs, on a $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - 1$ de quoi l'on tire

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - \mathrm{I}_n.$$

On a montré précédemment que (I_n) converge vers 0 donc $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}.$$

Commentaires: *Ici aussi, on prendra garde à ne pas écrire* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}$ *sans avoir justifié que cette limite existe. C'est le fait que* $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et les propriétés des limites de sommes qui nous permet de justifier que la suite converge et donc d'envisager sa limite.*

Exercice 3 :

1 — f est une fraction rationnelle de pôle 2. Le nombre complexe 2 n'a donc pas d'image par f.

— Le nombre complexe 1 n'a pas d'antécédent par f.
En effet, supposons qu'on ait trouvé $z \in \mathrm{E}$ tel que $f(z) = 1$. On aurait alors $\dfrac{z+i}{z-2} = 1$, d'où $z + i = z - 2$, et $i = -2$. C'est absurde.

Commentaires: *Dans la recherche de l'antécédent de b, une autre rédaction possible était :*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}, \; f(z) = b \iff \frac{z + \mathrm{i}}{z-2} = b \underset{z\neq 2}{\iff} z + \mathrm{i} = b(z-2) \iff z(b-1) = \mathrm{i} + 2b.$$

À ce stade, n'écrivez pas $z = \dfrac{2b+\mathrm{i}}{b-1}$ *avant de conclure* $b \neq 1$ *mais arrêtez vous à l'équation* $z(b-1) = \mathrm{i} + 2b$ *et concluez en disant que* z *n'existe que si* $b \neq 1$.

Cela vous évitera d'écrire un nombre qui, potentiellement, n'existe pas.

On pose $\mathrm{E} = \mathbb{C} \setminus \{2\}$ et $\mathrm{F} = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

2 (a) Si $z \in \mathrm{E}$, on a $z \neq 2$, donc l'expression $\dfrac{z+i}{z-2}$ est correctement définie. f est donc définie sur E.

(b) Soit $z' \in \mathrm{F}$, i.e. $z' - 1 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathrm{E}, \; f(z) = z' &\iff \frac{z+i}{z-2} = z' \iff z + i = z'(z-2) \\
&\iff (z'-1)z = z' + i \\
&\iff z = \frac{z'+i}{z'-1} \quad \text{car} \quad z' \neq 1.
\end{aligned}$$

Tout nombre complexe $z' \in \mathrm{F}$ admet donc exactement un antécédent par f, donné par $\dfrac{z'+i}{z'-1}$.

En conclusion, f réalise une bijection de E sur F.

3 $\forall z \in \mathrm{E}, z \in f^{-1}(\mathbb{U}) \iff f(z) \in \mathbb{U} \iff \left|\dfrac{z+i}{z-2}\right| = 1 \iff |z+i| = |z-2|$ car $z \neq 2$.

Posons $\mathrm{A}(-i)$, $\mathrm{B}(2)$ et $\mathrm{M}(z)$.

$\forall z \in \mathrm{E}, z \in f^{-1}(\mathbb{U}) \iff \mathrm{AM} = \mathrm{BM} \iff \mathrm{M}(z)$ appartient à la médiatrice de [AB].

$$f^{-1}(\mathbb{U}) \text{ est l'ensemble des affixes des points de la médiatrice de [AB].}$$

Commentaires: *Il est bien sûr impossible de faire cette question sans avoir une idée précise de l'image réciproque d'un ensemble :*

$$f^{-1}(\mathbb{U}) = \Big\{ z \in \mathrm{E} \,/\, f(z) \in \mathbb{U} \Big\} \text{ donc } z \in f^{-1}(\mathbb{U}) \iff f(z) \in \mathbb{U} \iff \ldots$$

Toute autre démarche échouera...a échoué !

En gros, je le redis, chaque fois que l'on ne sait pas quoi faire, on se ramène à ce que l'on sait : le cours et les définitions...pour peu que vous les ayez appris !

4 $$\begin{aligned}
\forall z \in \mathrm{E}, z \in f^{-1}(i\mathbb{R}) \iff f(z) \in i\mathbb{R} \iff \arg\left(\frac{z+i}{z-2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\; [\pi] &\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\; [\pi] \\
&\iff \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{M} \neq \mathrm{B}. \\
&\iff \mathrm{M}(z) \text{ appartient au cercle de diamètre [AB] privé de B.}
\end{aligned}$$

$$f^{-1}(i\mathbb{R}) \text{ est le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } B.$$

Commentaires: *En tout état de cause, un élève attentif pourrait se demander s'il ne faut pas enlever le point* A *afin d'éviter que* $\dfrac{z+i}{z-2}$ *soit nul dans l'argument ce qui est bien.*
Ce même élève vérifiera alors que $f(-\mathrm{i}) = 0 \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ *donc que* A *convient. Ce qui est très bien.*

Remarque : La fonction f a donc transformé le cercle $\mathbb{U}$ en une droite et la droite $\mathrm{i}\,\mathbb{R}$ en un cercle. Ce n'est pas une des isométries que vous connaissez mais une transformation du plan appelée *inversion*.