Nombres Complexes et Géométrie

On note $\mathcal{P}$ le plan complexe. On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ z & & 2z(1-z). \end{array}$$

On note $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point $\mathrm{M} \in \mathcal{P}$ d'affixe z associe le point $\mathrm{M}' = \mathcal{F}(\mathrm{M})$ d'affixe $f(z)$.

1. Quels sont les points fixes de $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire les points $\mathrm{M} \in \mathcal{P}$ tels que $\mathcal{F}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$) ?

2. Quels sont les points ayant pour image par $\mathcal{F}$ le point G' d'affixe -4 ?

3. Quels sont les points ayant pour image par $\mathcal{F}$ le point D' d'affixe $2+2i$?

4. a. Soient M_1 et M_2 deux points distincts d'affixes respectives z_1 et z_2.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur z_1 et z_2 pour que $\mathcal{F}(\mathrm{M}_1) = \mathcal{F}(\mathrm{M}_2)$.
   Interpréter géométriquement cette condition.

   b. La fonction $\mathcal{F}$ est-elle injective ?

   c. Démontrer que $\mathcal{F}$ est surjective.

   d. Déterminer les points $\mathrm{M} \in \mathcal{P}$ ayant exactement un antécédent par $\mathcal{F}$.

5. On cherche désormais à expliciter l'image par $\mathcal{F}$ du cercle trigonométrique $\mathbb{U}$.
   Soit $\theta \in [0, \pi]$.

   a. Calculer le module et un argument de $f(e^{i\theta})$.

   b. Après avoir calculé leur affixe, placer dans le plan complexe les images A', B', $\dots$, G' des points A, B, $\dots$, G du cercle trigonométrique d'argument respectif $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ et π.
   Tracer à partir de ces points une allure de l'image du demi-cercle trigonométrique supérieur.

   c. Montrer que l'on peut obtenir l'image du demi-cercle inférieur à partir de la précédente en effectuant une transformation géométrique simple.
   En déduire l'allure de $f(\mathbb{U})$.

   Aide: On pourra comparer $f(e^{i(2\pi-\theta)})$ et $f(e^{i\theta})$.