Nombres Complexes et Géométrie

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$f(z) = z \Leftrightarrow 2z(1-z) = z \Leftrightarrow z[2(1-z)-1] = 0 \Leftrightarrow z(2z-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Les points d'affixe $z = 0$ et $z = \dfrac{1}{2}$ sont les seuls points fixes de $\mathcal{F}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$f(z) = -4 \Leftrightarrow 2z(1-z) = -4 \Leftrightarrow z^2 - z - 2 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ \text{ou} \\ z = 2 \end{cases}.$$

Les points d'affixe $z = -1$ et $z = 2$ ont pour image par $\mathcal{F}$ le point G′ d'affixe -4.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$f(z) = -4 \Leftrightarrow 2z(1-z) = 2 + 2i \Leftrightarrow z^2 - z + 1 + i = 0.$$

Le discriminant Δ du polynôme $z^2 - z + 1 + i$ est

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (1+i) = -3 - 4i.$$

On recherche $\delta = a + ib$ avec a, b réels tels que $\delta^2 = \Delta$. On a

$$\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - 4i = a^2 - b^2 + 2iab \\ |-3-4i| = a^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -2 \\ a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -2 \\ a = \pm 1 \\ b = \pm 2. \end{cases}$$

Par conséquent, le choix $a = 1$ puis $b = -\dfrac{2}{a} = -2$ donne $\delta = 1 - 2i$ qui vérifie $\delta^2 = \Delta$.
Il s'ensuit que le polynôme $z^2 - z + 1 + i$ possède deux racines

$$\frac{1+\delta}{2} = 1 - i \quad \text{et} \quad \frac{1-\delta}{2} = i$$

ce qui nous permet de réécrire

$$f(z) = -4 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 + i = 0 \Leftrightarrow \big(z - (1-i)\big)\big(z - i\big) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - i \\ \text{ou} \\ z = i. \end{cases}$$

Les points d'affixe $z = 1 - i$ et $z = i$ ont pour image par $\mathcal{F}$ le point D′ d'affixe $2 + 2i$.

4 (a) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathrm{M}_1)=\mathcal{F}(\mathrm{M}_2) \Leftrightarrow f(z_1)=f(z_2) &\Leftrightarrow 2z_1(1-z_1)=2z_2(1-z_2) \Leftrightarrow z_1^2-z_2^2-(z_1-z_2)=0\\ &\Leftrightarrow (z_1-z_2)(z_1+z_2)-(z_1-z_2)=0 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(z_1+z_2-1)=0\\ &\Leftrightarrow z_1+z_2-1=0 \text{ car } z_1\neq z_2\\ &\Leftrightarrow \frac{z_1+z_2}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour deux points distincts M_1 et M_2, on a $\mathcal{F}(\mathrm{M}_1)=\mathcal{F}(\mathrm{M}_2)$ si et seulement si le milieu du segment $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$ est le point d'affixe $\frac{1}{2}$.

(b) D'après la question précédente, $\mathcal{F}$ n'est pas injective. Il suffit de prendre deux points distincts M_1 et M_2 symétriques par rapport à $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}\right)$ pour voir $\mathcal{F}(\mathrm{M}_1)=\mathcal{F}(\mathrm{M}_2)$ sans que $\mathrm{M}_1=\mathrm{M}_2$.
Par exemple, $f(0)=f(1)=0$ sans que les points d'affixe 0 et 1 soient confondus.

(c) Soit N un point du plan d'affixe a. On a

$$f(z)=a \Leftrightarrow 2z(1-z)=a \Leftrightarrow z^2-z+\frac{a}{2}=0. \qquad \text{(VIII.1)}$$

L'équation polynômiale à coefficients complexes $z^2-z+\frac{a}{2}=0$ possède au moins une solution $z_0\in\mathbb{C}$ donc il existe $z_0\in\mathbb{C}$ tel que $f(z_0)=a$.
En notant M le point d'affixe z_0, on a $\mathcal{F}(\mathrm{M})=\mathrm{N}$ donc $\mathcal{F}$ est surjective.

(d) Soit M un point du plan d'affixe a.
Le point M possède un unique antécédent si et seulement si l'équation $f(z)=a$ possède une unique solution z dans $\mathbb{C}$ *i.e.* le discriminant de (VIII.1) est nul :

$$1-4\frac{a}{2}=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, le point d'affixe $\frac{1}{2}$ est le seul point du plan ayant un unique antécédent par $\mathcal{F}$.

5 (a) Soit $\theta\in[0,\pi]$. On a :

$$\begin{aligned}f(e^{i\theta}) &= 2e^{i\theta}(1-e^{i\theta}) = 2e^{i\theta}e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -4i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{3\theta}{2}} = 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{3\theta}{2}}\\ &= 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{3\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Comme $\frac{\theta}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ alors $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\geqslant 0$.

Par conséquent, l'écriture $f(e^{i\theta})=4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left[\frac{3\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right]}$ correspond à l'écriture trigonométrique du complexe $f(e^{i\theta})$.
On en déduit que $f(e^{i\theta})$ a pour module $4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et un argument est $\frac{3\theta}{2}-\frac{\pi}{2}$.

(b)

	A	B	C	D	E	F	G
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(e^{i\theta})$	0	$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$	2	$2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ $= 2+2i$	$2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$ $2i\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$	-4
	A′	B′	C′	D′	E′	F′	G′

(c) Il suffit de calculer $f\left(e^{i(2\pi-\theta)}\right)$:

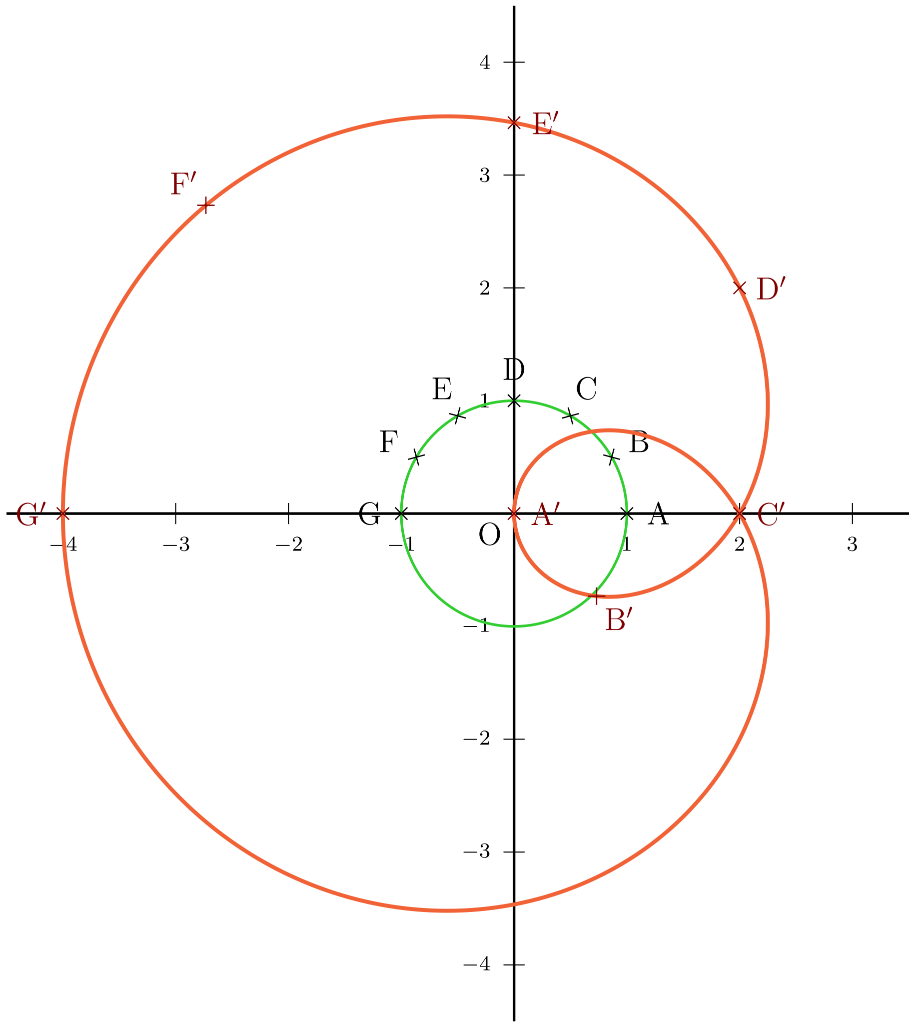
— Par 2π périodicité de sin, le module ne change pas :

$$\left|f\left(e^{i(2\pi-\theta)}\right)\right| = 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|.$$

— De plus, $\dfrac{3(2\pi-\theta)-\pi}{2} = \dfrac{5\pi-3\theta}{2} = -\dfrac{3\theta-\pi}{2}+2\pi$. L'argument de $f\left(e^{i(2\pi-\theta)}\right)$ est l'opposé de celui de $f\left(e^{i\theta}\right)$:

$$\arg\left(f\left(e^{i(2\pi-\theta)}\right)\right) = -\arg\left(f\left(e^{i\theta}\right)\right).$$

Autrement dit, les images des points situés en bas du cercle trigonométrique sont les conjugués des images des points du haut. Il suffit donc de faire une symétrie par rapport à l'axe réel pour obtenir la deuxième moitié de l'image du cercle trigonométrique.



Au passage, on pourra vérifier que le point C et son symétrique par rapport à l'axe des réels mais aussi par rapport au point d'affixe $\dfrac{1}{2}$ ont la même image par $\mathcal{F}$.