Équations différentielles et Géométrie complexe

Exercice 1 : On s'intéresse ici à la résolution sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln(x). \tag{E}$$

On notera (E_0) l'équation homogène associée : $y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{2}{1+x^2}y = 0.$ $\qquad(\mathrm{E}_0)$

I. Calculs préliminaires :

1. Montrer qu'il existe des réels $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

2. En déduire une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x(1+x^2)}$ sur I.

3. Vérifier que $\mathrm{G} : x \longmapsto \left(x - \dfrac{1}{3}x^3\right)\ln(x) - x + \dfrac{1}{9}x^3$ est une primitive sur I de la fonction $g : x \longmapsto g(x) = (1-x^2)\ln x$.

II. Résolution de (E_0) :

4. Montrer que $y_1 : x \longmapsto x$ est solution de (E_0).

5. Soit $y : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. On définit la fonction z par :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \; z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Montrer que y est solution de (E_0) si, et seulement si z' est solution de l'équation différentielle :

$$xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0. \tag{E'}$$

6. Résoudre l'équation différentielle (E').

7. En déduire l'ensemble des solutions de (E_0).

III. Résolution de l'équation (E) :

8. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p : x \longmapsto y_p(x) = \lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1),$$

où λ et μ sont deux fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0. \tag{Lag$_1$}$$

   a. Exprimer y_p' et y_p'' en fonction de λ et μ.
   b. Montrer que y_p est solution de (E) si, et seulement si

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2+1)\ln x. \tag{Lag$_2$}$$

   c. Pour $x \in \mathrm{I}$, montrer que $\lambda'(x) = (1-x^2)\ln(x)$ et $\mu'(x) = x\ln(x)$.
   d. En déduire une expression des fonctions λ et μ puis d'une solution particulière de (E).

9. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 2 : Dans le plan complexe $(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$, on nomme les points $A(-\mathrm{i})$ et $B(2+\mathrm{i})$ et on s'intéresse à l'application définie sur $\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}$ par :

$$f(z)=\frac{z-2-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$$

Le graphisme donné en annexe devra être complété au fur et à mesure de l'avancement de l'exercice. Un choix judicieux de couleurs ou de codages afin de faciliter la correction sera apprécié dans la notation.

1. Calculer les images par f de 1, de $3\mathrm{i}$ et de $1-2\mathrm{i}$ (on exprimera ces images sous forme algébrique).

2. Calculer les antécédents éventuels par f de 0, de 1 et de i (toujours sous forme algébrique).

3. Montrer que l'application f effectue une bijection de $\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}$ vers $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, et donner une expression explicite de sa réciproque f^{-1}.

4. Questions préliminaires :
   a. Déterminer les racines carrées de $-8-6\mathrm{i}$.
   b. *Question de cours :* Pour tout point $M\neq A$ du plan d'affixe z, exprimer l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{BM}\right)$ en fonction de $f(z)$.
   c. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z invariants par l'application f et placer les points correspondant sur le graphique. On les notera $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$

5. a. La transformation du plan complexe associée à f peut-elle être une des quatre isométries usuelles du plan ? Pourquoi ?
   b. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z)\in\mathbb{R}$.
   c. Déterminer et représenter graphiquement $f^{-1}(\mathrm{i}\,\mathbb{R})$.
   d. Déterminer et représenter graphiquement $f^{-1}(\mathbb{U})$.
   e. Montrer que, si $z\in\mathbb{U}$, son image $f(z)$ appartient à une droite à préciser.

6. Montrer que l'image par f du cercle de centre A et de rayon 1 est un cercle de centre $C(1)$ dont on précisera le rayon.

Nom: . . . . **Prénom:** . . . .

ANNEXE

Rappels : Le graphique devra comporter les points A, B et C, les points invariants, l'ensemble $\mathbb{U}$ ainsi que les ensembles décrits aux questions 5 et 6.