Équations différentielles et Géométrie complexe

Commentaires: *Au final, vous êtes revenus à vos démons. Dans une grande majorité, personne ne justifie la continuité, dérivabilité, ou le fait que l'on ne divise pas par 0. Tant pis pour vous. J'ai retiré 1 point à chaque fois. Un autre correcteur n'aurait pas lu plus loin.*

Pour résumer, on dérive, on intègre ou on divise sans se préoccuper de rien. C'est beau les maths !

Exercice 1 :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}\,y' + \frac{2}{1+x^2}\,y = (1+x^2)\ln(x). \tag{E}$$

I. 1 D'après la méthode standard de décomposition en éléments simples, on multiplie l'expression par x avant d'évaluer en 0. On trouve alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} + \frac{cx+d}{1+x^2}.$$

La méthode est identique pour l'élément de deuxième espèce : on multiplie par $1+x^2$ avant d'évaluer en i et d'égaliser parties réelle et imaginaire :

$$\frac{2}{\mathrm{i}} = \mathrm{i}\,c + d \iff -2\,\mathrm{i} = \mathrm{i}\,c + d \iff c = -2 \quad \text{et} \quad d = 0.$$

On trouve finalement :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{1+x^2}.}$$

2 Sur I, le dénominateur ne s'annule pas donc $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x(1+x^2)}$ y est continue. Une primitive sur I est donc

$$\boxed{\mathrm{F} : x \longmapsto 2\ln(x) - \ln(1+x^2) = \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right).}$$

Commentaires: *Point de points sans préciser la continuité !*

3 Sur I, $x > 0$ donc G est une somme de fonctions dérivables. Elle l'est également. Il suffit de dériver pour conclure.

Commentaires: *Sur une question aussi facile, ce n'est pas sur la dérivée que sont les points mais sur la dérivabilité.*

II. 4 La fonction y_1 est deux fois dérivable sur I et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y_1''(x) - \frac{2x}{1+x^2}\,y_1'(x) + \frac{2}{1+x^2}\,y_1(x) = 0 - \frac{2x}{1+x^2} \times 1 + \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

Donc, $\boxed{y_1 \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0).}$

Commentaires: *Dérivabilité avant la dérivée !*

5 Comme $x \neq 0$ sur I, z, quotient de fonctions deux fois dérivables et de dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ y est également deux fois dérivable et on a :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y(x) &= xz(x) \\ y'(x) &= z(x) + xz'(x) \\ y''(x) &= 2z'(x) + xz''(x). \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E_0)
$$\begin{aligned} &\iff y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0 \\ &\iff 2z'(x) + xz''(x) - \frac{2x}{1+x^2}\big(z(x) + xz'(x)\big) + \frac{2}{1+x^2}xz(x) = 0 \\ &\iff xz''(x) + 2\,\frac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{1+x^2}\,z'(x) = 0 \\ &\iff x(z')'(x) + \frac{2}{1+x^2}z'(x) = 0 \\ &\iff z' \text{ est solution de } xu'(x) + \frac{2}{1+x^2}\,u = 0. \qquad (\mathrm{E}') \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{y \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0) \text{ si, et seulement si } z' \text{ est solution de } (\mathrm{E}').}$

6 Comme $x \neq 0$, la solution générale de (E') est $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où A est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2}{x(1+x^2)}$, fonction continue sur I.

D'après (1), la solution générale de (E') est donc :

$$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)} = \lambda\,\frac{1+x^2}{x^2} = \lambda\left(1+\frac{1}{x^2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

7 z' est donc de la forme $x \longmapsto \lambda\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ *i.e.* z est de la forme

$$\boxed{z : x \longmapsto \lambda\left(x - \frac{1}{x}\right) + \mu, \quad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

Enfin, $y = xz$ est de la forme :

$$\boxed{y : x \longmapsto \lambda(x^2-1) + \mu x, \quad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

III. 8 (a) y_p est deux fois dérivable sur I comme produit et somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y_p'(x) = \cancel{x\lambda'(x)} + \lambda(x) + \underbrace{\cancel{\mu'(x)(x^2-1)}}_{=-x\lambda'(x)} + 2x\mu(x).$$

Donc, $\boxed{\begin{aligned} \forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y_p'(x) &= \lambda(x) + 2x\mu(x) \\ \text{et, } \; y_p''(x) &= \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x). \end{aligned}}$

(b) y_p est solution de (E) si, et seulement si , pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$
\begin{aligned}
(x^2+1)\ln(x) &= y_p'' - \frac{2x}{1+x^2}\,y_p' + \frac{2}{1+x^2}\,y_p \\
(x^2+1)\ln(x) &= \lambda' + 2\mu + 2x\mu' - \frac{2x}{1+x^2}(\lambda + 2x\mu) + \frac{2}{1+x^2}\big(\lambda x + \mu(x^2-1)\big) \\
(x^2+1)\ln(x) &= \lambda' + 2x\mu' + \underbrace{\lambda\,\overbrace{\frac{-2x+2x}{1+x^2}}^{=0} + \mu\,\overbrace{\frac{2+2x^2-4x^2+2x^2-2}{1+x^2}}^{=0}}_{=0} \\
(x^2+1)\ln(x) &= \lambda' + 2x\mu'.
\end{aligned}
$$

Donc, $\boxed{y_p \text{ est solution de (E) si, et seulement si } \lambda' + 2x\mu = (x^2+1)\ln(x).}$

(c) Soit $x \in \mathrm{I}$, le couple $(\lambda'(x)\,;\mu'(x))$ est donc solution du système :

$$
\left\{\begin{array}{rcrcl}
x\lambda'(x) & + & (x^2-1)\mu'(x) & = & 0 \\
\lambda'(x) & + & 2x\mu'(x) & = & (1+x^2)\ln x
\end{array}\right. \quad \text{de déterminant } 1+x^2 \neq 0.
$$

On trouve alors $\lambda'(x) = (1-x^2)\ln(x)$ et $\mu'(x) = x\ln(x)$.

(d) D'après (3), on a déjà :

$$
\boxed{\forall\, x \in \mathrm{I}, \qquad \lambda(x) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \frac{x^3}{9}}.
$$

Déterminons une primitive de μ' sur I : Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{t^2}{2}$ et $t \longmapsto \ln(t)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, on peut intégrer par parties et on a :

$$
\forall\, x \in \mathrm{I}, \qquad \int^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]^x - \int^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + \mathrm{C}. \quad (\mathrm{C} \in \mathbb{R})
$$

On considère la primitive pour laquelle $\mathrm{C} = 0$ et on trouve :

$$
\boxed{\forall\, x \in \mathrm{I}, \qquad \mu(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}.}
$$

Une solution particulière de (E) sur I est donc :

$$
\begin{aligned}
y_p : x \longmapsto y_p(x) &= \lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1) \\
&= \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\ln(x) - x^2 + \frac{x^4}{9} + \left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right)(x^2-1) \\
&= \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)\ln(x) - \frac{x^2}{4}\left(3 + \frac{5}{9}x^2\right).
\end{aligned}
$$

9 D'après ce qui précède, la solution générale de (E) sur I est de la forme :

$$
\boxed{y : x \longmapsto \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)\ln(x) - \frac{x^2}{4}\left(3 + \frac{5}{9}x^2\right) + \lambda(x^2-1) + \mu x, \ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.}
$$

Exercice 2 :

1

- $\boxed{f(1) = -1,}$
- $\boxed{f(3\,\mathrm{i}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\,,}$
- $\boxed{f(1-2\,\mathrm{i}) = 1 - 2\,\mathrm{i}\,.}$

En particulier, $1 - 2\,\mathrm{i}$ est donc un point invariant de f.

Commentaires: $\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ *!*

2
- $f(z) = 0 \implies \boxed{z = 2 + \mathrm{i}}$.

  Commentaires: *Non !, non et non on n'a pas* $\dfrac{a}{b} = 0 \iff a = 0$ *mais* $\dfrac{a}{b} = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ ET \\ b \neq 0. \end{cases}$

- $f(z) = 1 \implies z - 2 - \mathrm{i} = z + \mathrm{i}$ qui n'a pas de solution.

  $\boxed{\text{Donc, } 1\text{ , n'a pas d'antécédents par } f.}$
- $f(z) = \mathrm{i} \implies z - 2 - \mathrm{i} = \mathrm{i}\,z - 1 \iff (1-\mathrm{i})z = 1 + \mathrm{i}$

  $$\iff z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \boxed{\mathrm{i}\,.}$$

  En particulier, i est aussi un point invariant de f.

3 Surtout pas de calculs compliqués pour cette question, il suffit de partir de l'expression de $f(z) = \mathrm{Z}$ et de calculer explicitement la réciproque :

$$\forall z \neq -\mathrm{i}\,,\ \frac{z-2-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = \mathrm{Z} \underset{z\neq -\mathrm{i}}{\iff} z - 2 - \mathrm{i} = z\mathrm{Z} + \mathrm{i}\,\mathrm{Z} \iff z(1-\mathrm{Z}) = 2 + \mathrm{i} + \mathrm{i}\,\mathrm{Z}.$$

Si $\mathrm{Z} \neq 1$ alors $z = \dfrac{\mathrm{i}\,\mathrm{Z} + 2 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{Z}}$.

L'application f est donc bien bijective de $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$ vers $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, et on a :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},\ f^{-1}(z) = \frac{\mathrm{i}\,z + 2 + \mathrm{i}}{1 - z}.}$$

Commentaires:

— *Encore et toujours, avant de multiplier par $z + \mathrm{i}$ ou diviser par $1 - \mathrm{Z}$, on précise que l'on peut !*

— *Je rappelle que dans $\mathbb{C}$, il n'existe pas de relation d'ordre compatible avec les opérations donc on n'y pourra jamais invoquer des fonctions monotones ou autre théorème des valeurs intermédiaires qui y est faux d'ailleurs.*

4 (a) Cherchons $\delta = a + \mathrm{i}\,b$ tel que $\delta^2 = -8 - 6\,\mathrm{i}$.

Déterminons a et b en identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \\ a^2 + b^2 = |\delta|^2 = |\delta^2| = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 3 \end{cases}$$

Comme $2ab < 0$, les réels a et b sont de signe opposé.

Les racines carrées de $-8 - 6\,\mathrm{i}$ sont donc $\boxed{1 - 3\,\mathrm{i}}$ et $\boxed{-1 + 3\,\mathrm{i}}$.

(b) $$\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_\mathrm{M} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{M} - z_\mathrm{A}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_\mathrm{M} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{M} - z_\mathrm{A}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z - 2 - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\right) \equiv \arg\left(f(z)\right)\ [2\pi]\,.$$

Commentaires: *N'oubliez pas le arg sinon ce n'est plus un angle !!! Ni le $[2\pi]$ d'ailleurs. Le module n'a rien à voir avec des angles !*

(c) Il s'agit de résoudre l'équation $f(z) = z$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$:

$$f(z) = z \iff z - 2 - \mathrm{i} = z^2 + \mathrm{i}\,z \iff z^2 + (\mathrm{i} - 1)z + 2 + \mathrm{i} = 0.$$

Équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = -8 - 6\mathrm{i} = (1 - 3\mathrm{i})^2$ d'après 3 (a).

Les solutions sont donc $z_1 = \dfrac{1 - \mathrm{i} + 1 - 3\mathrm{i}}{2} = 1 - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = \dfrac{1 - \mathrm{i} - 1 + 3\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$.

L'application f a donc deux points fixes $\boxed{\Omega_1(1 - 2\mathrm{i})}$ et $\boxed{\Omega_2(\mathrm{i})}$.

Commentaires: *Plus efficace mais sans utiliser le résultat de la question 4 (a), on pouvait utiliser intelligemment les résultats de 1 et 2 pour reconnaître les deux racines* i *et* $1-2\mathrm{i}$ *de l'équation de degré 2 et écrire directement :* $z^2 + (\mathrm{i} - 1)z + 2 + \mathrm{i} = (z + \mathrm{i})(z - 1 + 2\mathrm{i})$.

5 (a) D'après la question 3 (c), la transformation associée à f admet deux points invariants donc ce ne peut être une des 4 isométries qui ont exclusivement 0, 1 ou une infinité de points invariants.

(b) Posons M le point d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$.

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} &\iff \arg\left(f(z)\right) \in \mathbb{R} \iff \arg\left(\frac{z - 2 - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\right) \in \mathbb{R} \iff \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) \equiv 0 \ [\pi] \\ &\iff \text{les points A, M et B sont alignés.} \\ &\iff \mathrm{M} \in (\mathrm{AB}). \end{aligned}$$

En remarquant également que le point B d'affixe $2 + \mathrm{i}$ vérifie $f(2 + \mathrm{i}) = 0 \in \mathbb{R}$ donc convient, l'ensemble cherché est donc la droite (AB) privé du point A.

(c) De même que précédemment,

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} &\iff \arg\left(f(z)\right) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \arg\left(\frac{z - 2 - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\right) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \\ &\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]. \end{aligned}$$

Ici aussi $f(2 + \mathrm{i}) = 0 \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ donc le point B convient encore et l'ensemble cherché est le cercle de diamètre [AB] privé du point A.

(d) Encore,

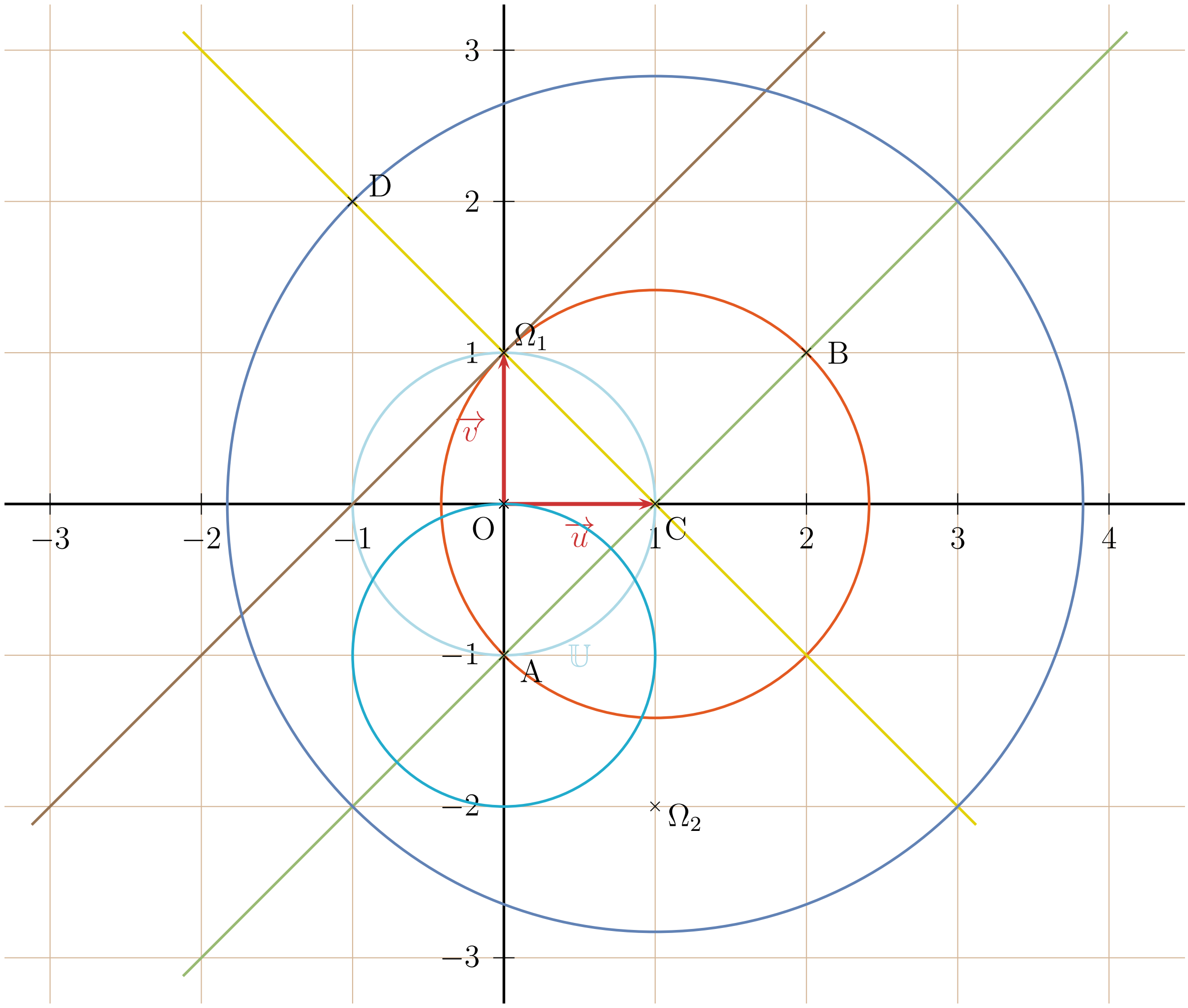
$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{U} &\iff |f(z)| = 1 \iff \left|\frac{z - 2 - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\right| = 1 \\ &\iff |z - 2 - \mathrm{i}| = |z + \mathrm{i}| \iff \mathrm{BM} = \mathrm{AM}. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [AB].

(e) D'après la question (3), on a :

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{U} &\iff |z| = 1 \iff \left|\frac{\mathrm{i}\,z + 2 + \mathrm{i}}{1 - z}\right| = 1 \iff \left|\mathrm{i}\,\frac{z + 1 - 2\mathrm{i}}{1 - z}\right| = 1 \\ &\iff \left|\frac{z + 1 - 2\mathrm{i}}{1 - z}\right| = 1 \iff |z + 1 - 2\mathrm{i}| = |z - 1| \\ &\iff \mathrm{MD} = \mathrm{MC} \text{ où } \mathrm{D}(-1 + 2\mathrm{i}) \text{ et } \mathrm{C}(1). \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [CD].



6 $f(z)-1=\dfrac{z-2-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}-1=\dfrac{-2-2\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}=\dfrac{-2(1+\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}$.

D'où, $z\in\mathscr{C}\Big(\mathrm{A}(-\mathrm{i}),\,1\Big) \iff |z+\mathrm{i}|=1 \implies |f(z)-1|=|-2(1+\mathrm{i})|=2\sqrt{2}$.

L'image par f du cercle de centre $\mathrm{A}(-\mathrm{i})$ et de rayon 1 est donc le cercle de centre $\mathrm{C}(1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.