# Équations différentielles & Géométrie Complexe

**Exercice 1 :** On considère l'équation différentielle

$$(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x} \qquad \text{(E)}$$

On note $(\mathrm{E}_0)$ l'équation linéaire homogène associée à (E).

On cherche les solutions sur l'intervalle $\mathrm{I} = ]-1, +\infty[$.

1. Montrer que $\phi : x \longmapsto e^x$ est solution de $(\mathrm{E}_0)$ sur I.
2. Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur I.
   a) Justifier que $f$ peut s'écrire sous la forme $f = \lambda\phi$, où $\lambda$ est une fonction deux fois dérivable sur I.
   b) Montrer qu'alors, $f$ est solution de E si, et seulement si, $\lambda'$ est solution d'une équation différentielle $(\mathrm{E}')$ d'ordre 1 que l'on déterminera.
   c) Résoudre $(\mathrm{E}')$ sur I.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I.

**Exercice 2 :** Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(0; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
On désigne par A le point d'affixe $2i$ et on considère enfin l'application $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P} \setminus \{\mathrm{A}\}$ dans $\mathcal{P} \setminus \{\mathrm{A}\}$, qui à tout point M d'affixe $z$ associe le point M′ d'affixe $z'$ défini par :

$$z' = f(z), \quad \text{où} \quad f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus \{2\,i\} & \longmapsto & \mathbb{C} \setminus \{2\,i\} \\ z & & f(z) = \dfrac{2iz-5}{z-2i} \end{array}.$$

1. Montrer qu'il existe deux points B et C invariants par $\mathcal{F}$.
2. Montrer que pour tout point $\mathrm{M}_1 \in \mathcal{P} \setminus \{\mathrm{A}\}$, il existe un unique point $\mathrm{M}_0 \in \mathcal{P} \setminus \{\mathrm{A}\}$ tel que $\mathrm{M}_1 = \mathcal{F}(\mathrm{M}_0)$.
   Que peut-on dire de $\mathcal{F}$ ?
3. Donner une expression de l'application $\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{M}_1 \longmapsto \mathrm{M}_0$.
   Que remarque-t-on ?
4. On note $\mathcal{D}$ l'axe des ordonnées privé de A.
   Montrer que si $\mathrm{M} \in \mathcal{D}$, alors $\mathrm{M}' = \mathcal{F}(\mathrm{M})$ est également situé sur $\mathcal{D}$.
   On dit que $\mathcal{D}$ est *globalement invariant* par $\mathcal{F}$.
5. a) Montrer que si $z \neq 2i$, alors $|z'-2i| \times |z-2i| = 9$
   b) En déduire l'image par $\mathcal{F}$ du cercle $\Gamma$ de centre A et de rayon $r > 0$.
   c) Déterminer $r$ pour que $\Gamma$ soit globalement invariant par $\mathcal{F}$.