Équations différentielles & Géométrie Complexe

Exercice 1 : On considère l'équation différentielle

$$(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x} \qquad \text{(E)}$$

Son équation linéaire homogène associée est $(\mathrm{E}_0) : (1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = 0$.
On cherche les solutions sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-1, +\infty[$.

ATTENTION (E) n'entre pas dans le cas du cours : il ne s'agit pas d'une équation *à coefficients constants.*

1. $\phi : x \mapsto e^x$ est deux fois dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I}, \phi(x) = \phi'(x) = \phi''(x) = e^x$.
D'où $\forall x \in \mathrm{I}, \quad (1+x)\phi''(x) - 2\phi'(x) + (1-x)\phi(x) = (1+x)e^x - 2e^x + (1-x)e^x = 0.$
On en déduit que ϕ est bien solution de (E_0) sur I.

2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.

a. Comme ϕ ne s'annule pas sur I, on peut poser

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \left(\frac{f(x)}{\phi(x)}\right) \phi(x) = \lambda(x)\phi(x), \text{ où } \lambda = \frac{f}{\phi}.$$

La fonction λ obtenue est deux fois dérivable sur I comme quotient de fonctions deux fois dérivables sur I et de dénominateur ne s'annulant pas.
Finalement, f peut bien s'écrire sous la forme $f = \lambda\phi$, où λ est une fonction deux fois dérivable sur I.

b. On a alors, $\forall x \in \mathrm{I}, \quad \begin{cases} f(x) = \lambda(x)e^x \\ f'(x) = [\lambda'(x) + \lambda(x)]e^x \\ f''(x) = [\lambda''(x) + 2\lambda'(x) + \lambda(x)]e^x \end{cases}.$

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de (E)} &\iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad (1+x)f''(x) - 2f'(x) + (1-x)f(x) = xe^{-x} \\ &\iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad (1+x)[\lambda''(x) + 2\lambda'(x) + \lambda(x)]e^x \\ &\qquad\qquad - 2[\lambda'(x) + \lambda(x)]e^x + (1-x)\lambda(x)e^x = xe^{-x} \\ &\iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad [(1+x)\lambda''(x) + 2x\lambda'(x)]e^x = xe^{-x} \\ &\iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad (1+x)\lambda''(x) + 2x\lambda'(x) = xe^{-2x} \\ &\iff \lambda' \text{ est solution de } (1+x)y' + 2xy = xe^{-2x} \end{aligned}$$

On pose dans la suite $(\mathrm{E}') : (1+x)y' + 2xy = xe^{-2x}$.
C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, et on a bien :

$$f \text{ est solution de E} \iff \lambda' \text{ est solution de } (\mathrm{E}') : (1+x)y' + 2xy = xe^{-2x}.$$

c. Sur I, $1 + x$ ne s'annule pas. (E') est donc équivalente à

$$y' + \frac{2x}{1+x}y = \frac{xe^{-2x}}{1+x}.$$

— **Résolution de l'équation homogène associée :** $(\mathrm{E}_0') : y' + \dfrac{2x}{1+x}y = 0.$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x}$ étant continue sur I, d'après le cours, les solutions de (E_0') sur I sont les fonctions $x \mapsto ke^{-\int^x \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Or, $\displaystyle\int^x \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{(2t+2)-2}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int^x \left(2 - \frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t$

$= 2x - 2\ln|1+x| = 2x - 2\ln(1+x).$ car $(1+x>0)$

et $\mathrm{e}^{-\int^x \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-2x+2\ln(1+x)} = \mathrm{e}^{-2x}e^{\ln(1+x)^2} = (1+x)^2\,\mathrm{e}^{-2x}.$

Les solutions de de (E_0') sur I sont les fonctions $x \longmapsto k(1+x)^2e^{-2x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

— **Recherche de solution particulière par la méthode de *variation de la constante* :**

On cherche une solution particulière g sous la forme $g : x \mapsto k(x)(1+x)^2e^{-2x}$ où k est une fonction dérivable sur I.

On a,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathrm{I}, \quad g'(x) &= k'(x)(1+x)^2e^{-2x} + k(x)[2(1+x)e^{-2x} - 2(1+x)^2e^{-2x}] \\ &= k'(x)(1+x)^2e^{-2x} - 2k(x)x(x+1)e^{-2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g \text{ est solution de (E)} &\iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) + \frac{2x}{1+x}f(x) = \frac{xe^{-2x}}{1+x} \\ &\iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad k'(x)(1+x)^2e^{-2x} - 2k(x)x(x+1)e^{-2x} \\ &\qquad\qquad + \frac{2x}{1+x}k(x)(1+x)^2e^{-2x} = \frac{xe^{-2x}}{1+x} \\ &\iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad k'(x)(1+x)^2e^{-2x} = \frac{xe^{-2x}}{1+x} \\ &\iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad k'(x) = \frac{x}{(1+x)^3} \\ &\iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad k'(x) = \frac{(1+x)-1}{(1+x)^3} \\ &\iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad k'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}\end{aligned}$$

Comme on cherche une solution particulière, on peut choisir

$$k : x \mapsto \frac{-1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2}.$$

C'est à dire

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathrm{I}, \quad g(x) = k(x)(1+x)^2e^{-2x} &= \left(\frac{-1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2}\right)(1+x)^2e^{-2x} \\ &= \left(-(1+x) + \frac{1}{2}\right)e^{-2x} = -\left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') sur I est donc $g : x \longmapsto -\left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^{-2x}$

— **Bilan :** Les solutions de (E′) sur I sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto k(1+x)^2 e^{-2x} - \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

3 On peut maintenant poursuivre le raisonnement du 2 b :

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de (E)} &\iff \lambda' \text{ est solution de } (1+x)y' + 2xy = xe^{-2x} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{I},\ \lambda'(x) = k(1+x)^2 e^{-2x} - \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x} \\
&\iff \exists k, \ell \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{I},\ \lambda(x) = \int^x k(1+t)^2 e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad\qquad - \int^x \left(t+\frac{1}{2}\right)e^{-2t}\,\mathrm{d}t + \ell \\
&\iff \exists k, \ell \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{I},\ \lambda(x) = -\frac{k}{4}(2x^2+6x+5)e^{-2x} + \frac{x+1}{2}e^{-2x} + \ell \\
&\iff \exists k, \ell \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = -\frac{k}{4}(2x^2+6x+5)e^{-x} + \frac{x+1}{2}e^{-x} + \ell e^{x}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \mathrm{A}(2x^2+6x+5)e^{-x} + \mathrm{B}e^{x} + \frac{x+1}{2}e^{-x}, \quad (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 2 :

1 Recherche des points invariants :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(z) \text{ est invariant par } f &\iff f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \\
&\iff z' = z \iff \frac{2iz-5}{z-2i} = z \iff 2iz - 5 = z(z-2i) \\
&\iff z^2 - 4iz + 5 = 0 \text{ car } z \neq 2i
\end{aligned}$$

$\Delta = -36 = (6i)^2$. Les solutions sont $5i$ et $-i$.

Donc, f a deux points invariants : $\mathrm{B}(5i)$ et $\mathrm{C}(-i)$.

2 Soit $\mathrm{M}_1 \in \mathcal{P} \setminus \{\mathrm{A}\}$ et z_1 son affixe ($z_1 \neq 2i$).

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_0(z_0) \text{ est un antécédent de } \mathrm{M}_1 \text{ par } f &\iff z_1 = \frac{2iz_0-5}{z_0-2i} \\
&\iff (z_0-2i)z_1 = 2iz_0 - 5 \text{ car } z_0 \neq 2i \\
&\iff z_0(z_1-2i) = 2iz_1 - 5 \\
&\iff z_0 = \frac{2iz_1-5}{z_1-2i} \text{ car } z_1 \neq 2i
\end{aligned}$$

Donc M_1 a un et un seul antécédent par f : le point M_0 d'affixe $\dfrac{2iz_1-5}{z_1-2i}$.

Donc, f est une bijection sur $\mathcal{P} \setminus \{\mathrm{A}\}$.

3 On vient de voir que $f^{-1} : \mathrm{M}_1 \mapsto \mathrm{M}_0$ est définie par $z_0 = \dfrac{2iz_1 - 5}{z_1 - 2i}$.

On remarque que $f^{-1} = f$ et on dit que f est involutive.

4 Soit $\mathrm{M}(z) \in \mathcal{D}$, alors $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;

Ainsi, $z' = \dfrac{2i(iy) - 5}{iy - 2i} = \dfrac{-2y - 5}{i(y-2)} = \dfrac{2y+5}{y-2} i \in i\mathbb{R}$.

On remarque que $\dfrac{2y+5}{y-2} i = \dfrac{2(y-2)+9}{y-2} i = \left(2 + \dfrac{9}{y-2}\right) i \neq 2i$.

On a bien $\mathrm{M}' \in \mathcal{D}$ *i.e.* $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$: $\mathcal{D}$ est globalement invariant par f.

5 (a) Si $z \neq 2i$, alors : $z' - 2i = \dfrac{2iz - 5}{z - 2i} - 2i = \dfrac{2iz - 5 - 2i(z-2i)}{z - 2i} = \dfrac{-9}{z-2i}$.

Par conséquent, $(z'-2i)(z-2i) = -9$, et en passant aux modules, $|z'-2i| \times |z-2i| = 9$.

(b) Soit $\mathrm{M}(z)$ sur le cercle Γ de centre A et de rayon $r > 0$. Alors $\mathrm{AM} = |z-2i| = r$.

On a vu que $|z'-2i| \times |z-2i| = 9$, d'où $\mathrm{AM}' = |z'-2i| = \dfrac{9}{|z-2i|} = \dfrac{9}{r}$.

En notant Γ' le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{9}{r}$, on a prouvé que $f(\Gamma) \subset \Gamma'$.

Réciproquement, soit un point M_1 du cercle $\mathcal{C}\left(\mathrm{A}\,;\dfrac{9}{r}\right)$. Par le même raisonnement, on peut prouver que son image M_1' par f est sur le cercle $\mathcal{C}\left(\mathrm{A}\,;\dfrac{9}{9/r}\right)$, c'est-à-dire sur Γ.

Or, f étant involutive, on a aussi $f(\mathrm{M}_1') = \mathrm{M}_1$.

Tous les points de Γ' ont par conséquent un antécédent sur Γ. Cela prouve que $\Gamma' \subset f(\Gamma)$.

$$\text{Ainsi } f(\Gamma) = \Gamma'.$$

(c) Γ est globalement invariant par $f \iff f(\Gamma) = \Gamma \iff \dfrac{9}{r} = r \iff r = 3$ (car $r > 0$).

Le cercle de centre A et de rayon 3 est globalement invariant par f.

On peut remarquer qu'il contient les points B et C.