Révisions

Exercice 1 : Déterminer les solutions complexes de l'équation :

$$2z^6 - (\sqrt{3}+3i)z^3 - 1 + i\sqrt{3} = 0.$$

Exercice 2 :

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. Résoudre sur $I =]-1, +\infty[$ le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} (x+1)y'(x) - xy(x) + 1 = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = xe^x \qquad \text{(E)}$$

   a. Justifier que (E) admet des solutions sur $\mathbb{R}$.
   b. Résoudre (E_0), l'équation différentielle homogène associée sur $\mathbb{R}$.
   c. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
   d. Justifier qu'il existe une unique solution f de (E) telle que $f(0) = -\dfrac{4}{49}$ et $f'(0) = 0$ puis la déterminer.

3. Résoudre l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t^2z''(t) + 3tz'(t) + 4z(t) = 0 \qquad \text{(F)}$$

Aide : Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pourra poser $x = \ln(t)$, $y(x) = z(t)$ et prouver que y est solution de (E).

Exercice 3 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\,dt$.

Partie A : Calcul explicite de I_n.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a. Calculer *simplement* $\displaystyle\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t-t^2\right)^n dt$.
   b. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n\,dt = \frac{1}{2}I_n$.

   Aide : On pourra remarquer que $\left(t-t^2\right)^n = t^n(1-t)^n$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}\displaystyle\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n\,dt$.

4. Vérifier que $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n\,dt - \int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n\,dt = I_{n+1}$.

   En déduire la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(2n+3)}I_n$, puis calculer I_3 et I_4.
5. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $I_n = \dfrac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

Partie B : Applications

6. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{n+k+1}$ et en déduire une expression factorisée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{n+k+1}$.
7. a. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt + \int_0^1 \frac{(t(1-t))^{n+1}}{t^2-t+1}\,dt$.
   b. Calculer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt$
   c. On pose $R_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\big(t(1-t)\big)^{n+1}}{t^2-t+1}\,dt$.
      i. Montrer que pour tout $t \in [0;1]$, $\big(t(1-t)\big)^n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
      ii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant R_n \leqslant \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9\times 4^{n+1}}$ puis calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n$.
   d. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)\binom{2k}{k}}$.

Partie C : Et J_n dans tout ça ?

8. Calculer J_0, J_1 et J_2.
9. Montrer, à l'aide du changement de variable : $t = \pi - u$, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)^n\,dt$$

10. En partant de $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt$ et à l'aide du changement de variable : $t = \cos^2(u)$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2u)^{2n+1}du.$$

11. En déduire, en posant $v = 2u$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{4^n}J_{2n+1}.$$