Révisions

Exercice 1 : Soit Δ le discriminant associé à l'équation

$$2z^2 - (\sqrt{3}+3i)z - 1 + i\sqrt{3} = 0.$$

.

On a $\Delta = (-(\sqrt{3}+3i))^2 - 4\times 2(-1+i\sqrt{3}) = 2 - 2i\sqrt{3}$.
Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\delta = x+iy$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta &\iff \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2+2ixy = 2-2i\sqrt{3} \\ |\delta|^2 = x^2+y^2 = |\Delta| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2 = 2 \\ x^2+y^2 = 4 \\ xy = -\sqrt{3} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x^2 = 3 \\ y^2 = 1 \\ xy = -\sqrt{3} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ y = -1 \end{array}\right. \quad \text{OU} \quad \left\{\begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{array}\right. \quad \text{car } xy \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Une racine carrée de Δ est donc $\delta = -\sqrt{3}+i$.
Les solutions $z\in\mathbb{C}$ cherchée vérifient donc

$$\boxed{z^3 = \frac{\sqrt{3}+3i-\sqrt{3}+i}{4} = i \quad \text{OU} \quad z^3 = \frac{\sqrt{3}+3i+\sqrt{3}-i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}.}$$

Il ne reste plus qu'à retrouver les racines cubiques de i et $e^{i\frac{\pi}{6}}$:

$$z \text{ est solution de (E)} \iff z = e^{i\frac{\pi}{6}},\ z = je^{i\frac{\pi}{6}},\ z = j^2e^{i\frac{\pi}{6}},\ z = e^{i\frac{\pi}{18}},\ z = je^{i\frac{\pi}{18}} \text{ OU } z = j^2e^{i\frac{\pi}{18}}.$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\mathscr{S}_{(\mathrm{E})} = \left\{e^{-i\frac{11\pi}{18}}; -i; e^{i\frac{\pi}{18}}; e^{i\frac{\pi}{6}}; e^{i\frac{13\pi}{18}}; e^{i\frac{5\pi}{6}}\right\}.}$$

Exercice 2 :

1. Pour tout $x\in\mathrm{I}$, $(x+1)\neq 0$ et on a donc :

$$\forall x\in\mathrm{I},\quad (x+1)y'(x) - xy(x) + 1 = 0 \iff \forall x\in\mathrm{I},\quad y'(x) - \frac{x}{x+1}y(x) = \frac{-1}{x+1} \qquad \text{(E)}$$

Les fonctions $a : x \longmapsto -\frac{x}{x+1}$ et $\frac{-1}{x+1}$ sont continues sur I, donc on sait que le problème de Cauchy $\mathcal{C}$ admet une unique solution.
On note (E_0) l'équation homogène associée :

$$(\mathrm{E}_0) \qquad \forall x\in\mathrm{I},\quad y'(x) - \frac{x}{x+1}y(x) = 0$$

On remarque que : $\forall\, x \in \mathrm{I},\ a(x) = -\dfrac{(x+1)-1}{x+1} = -1 + \dfrac{1}{x+1}$.
La fonction a étant continue sur I, elle admet des primitives sur I dont l'une est donnée par :

$$\mathrm{A} : \begin{array}{rcl} \mathrm{I} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & -x + \ln(|x+1|) = -x + \ln(x+1) \end{array}.$$

On en déduit l'ensemble des solutions de (E_0) :

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ x \longmapsto \lambda e^{x - \ln(x+1)} = \lambda \frac{e^x}{x+1},\ \lambda \in \mathbb{R} \right).$$

Cherchons une solution sous la forme $y = \lambda \dfrac{e^x}{x+1}$ où λ est une fonction dérivable sur I. Pour simplifier les écritures, on pose $y_0 = \dfrac{e^x}{x+1}$.

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (E) sur I} &\iff y'(x) - \frac{x}{x+1} y(x) = \frac{-1}{x+1} \\ (\forall\, x \in \mathrm{I}) \qquad &\iff \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x) - \frac{x}{x+1}\lambda(x) y_0(x) = \frac{-1}{x+1} \\ &\iff \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) \underbrace{\left(y_0'(x) - \frac{x}{x+1} y_0(x) \right)}_{=0} = \frac{-1}{x+1} \\ &\iff \lambda'(x) y_0(x) = \frac{-1}{x+1} \\ &\iff \lambda'(x) = -e^{-x} \end{aligned}$$

Une primitive de λ sur I est donc,

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \lambda(x) = e^{-x}.$$

Une solution particulière de (E) sera donc définie par :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y_p(x) = e^{-x} \frac{e^x}{x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

Les solutions générales de (E) seront donc les fonctions de la forme :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{\lambda e^x}{x+1}.$$

Alors y est solution du problème de Cauchy $\mathcal{C}$ si et seulement si :

$$y(0) = 2 \iff \frac{1 + \lambda e^0}{0+1} = 2 \iff 1 + \lambda = 2 \iff \lambda = 1$$

Conclusion : $\boxed{\text{l'unique solution de } \mathcal{C} \text{ est la fonction } y : \begin{array}{rcl}]-1\,;+\infty[& \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \dfrac{1+e^x}{x+1} \end{array}.}$

2 (a) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont le second membre est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Elle admet donc des solutions sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

(b) L'équation différentielle homogène associée à (E) est donnée par

$$(\mathrm{E}_0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = 0.$$

Son équation caractéristique associée est $(\mathrm{E}_c) : r^2 + 2r + 4 = 0$ dont le discriminant vaut $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$. Les racines sont donc

$$r_\pm = \frac{-2 \pm i\sqrt{12}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

L'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est donné par :

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{A}\cos(\sqrt{3}x) + \mathrm{B}\sin(\sqrt{3}x)\right) \end{array} \mid (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

(c) Sur l'allure du second membre, on cherche une solution particulière de la forme $y_p : x \longmapsto (ax+b)\mathrm{e}^x$, $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.
La fonction y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (ax + a + b)\mathrm{e}^x \\ y_p''(x) &= (ax + 2a + b)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de (E)} \iff\ & y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = x\mathrm{e}^x \\ (\forall\, x \in \mathbb{R}) \qquad \iff\ & (ax+2a+b)\mathrm{e}^x + 2(ax+a+b)\mathrm{e}^x + 4(ax+b)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x \\ \iff\ & ax + 2a + b + 2ax + 2a + 2b + 4ax + 4b = x \qquad \text{car } \mathrm{e}^x \neq 0 \\ \iff\ & 7ax + 4a + 7b = x \\ \iff\ & \left\{ \begin{array}{l} 7a = 1 \\ 4a + 7b = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 1/7 \\ b = -4a/7 = -4/49. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, $y_p : x \longmapsto \dfrac{7x-4}{49}\,\mathrm{e}^x$ est une solution (particulière) de (E) qui convient.
Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{A}\cos(\sqrt{3}x) + \mathrm{B}\sin(\sqrt{3}x)\right) + \dfrac{7x-4}{49}\mathrm{e}^x \end{array} \mid (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

(d) On cherche les solutions de :

$$(\mathscr{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{E}) : \ \forall\, x \in \mathbb{R}, f''(x) + 2f'(x) + 4f(x) = x\mathrm{e}^x \\ f(0) = \dfrac{4}{49} \\ f'(0) = 0 \end{array} \right.$$

C'est un problème de Cauchy linéaire d'ordre 2 qui admet donc une unique solution.

Soit f cette unique solution. Par la question précédente, il existe $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{A}\cos(\sqrt{3}x) + \mathrm{B}\sin(\sqrt{3}x)) + \frac{7x-4}{49}\mathrm{e}^{x}.$$

Or, $f(0) = \mathrm{A} - \dfrac{4}{49} = -\dfrac{4}{49}$.
Donc, $\mathrm{A} - \dfrac{4}{49} = -\dfrac{4}{49} \iff \mathrm{A} = 0$.
Ainsi,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{B}\sin(\sqrt{3}x) + \frac{7x-4}{49}\mathrm{e}^{x}.$$

Comme solution de (E), f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\mathrm{B}\sin(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{B}\cos(\sqrt{3}x) + \frac{7}{49}\mathrm{e}^{x} + \frac{7x-4}{49}\mathrm{e}^{x}$$

D'où, $f'(0) = 0 \iff 0 = \mathrm{B}\sqrt{3} + \dfrac{3}{49} \iff \mathrm{B} = -\dfrac{3}{\sqrt{3}49} = -\dfrac{\sqrt{3}}{49}$.
Conclusion, l'unique solution du problème de Cauchy est donné par

$$\boxed{\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & & -\dfrac{\sqrt{3}}{49}\,\mathrm{e}^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x\right) + \dfrac{7x-4}{49}\,\mathrm{e}^{x}. \end{array}}$$

3 Soient z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, posons $x = \ln(t) \iff t = e^x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $y(x) = z\left(\mathrm{e}^{x}\right)$.
Puisque la fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit par composée que y est également deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(t) &= y(\ln(t)) \\ z'(t) &= \frac{1}{t}y'(\ln(t)) \\ z''(t) &= -\frac{1}{t^2}y'(\ln(t)) + \frac{1}{t^2}y''(\ln(t)). \end{aligned}$$

La fonction z est solution de (F) si, et seulement si

$$\begin{aligned} &\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t^2 z''(t) + 3tz'(t) + 4z(t) = 0 \\ &\iff t^2\left(-\frac{1}{t^2}y'(\ln(t)) + \frac{1}{t^2}y''(\ln(t))\right) + 3t \times \frac{1}{t}y'(\ln(t)) + 4y(\ln(t)) = 0 \\ &\iff -y'(\ln(t)) + y''(\ln(t)) + 3y'(\ln(t)) + 4y(\ln(t)) = 0 \\ &\iff y''(\ln(t)) + 2y'(\ln(t)) + 4y(\ln(t)) = 0. \end{aligned}$$

Quand t parcourt $\mathbb{R}_+^*$, $x = \ln(t)$ parcourt bien $\mathbb{R}$ tout entier, donc :

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de (F)} &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = 0 \\ &\iff y \text{ est solution de (E)}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, z est solution de (F) si, et seulement si

$$\begin{aligned}
&\exists(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2, \forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)=\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{A}\cos(\sqrt{3}x)+\mathrm{B}\sin(\sqrt{3}x))+\frac{7x-4}{49}\mathrm{e}^{x}\\
\iff &\exists(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2, \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad z(t)=\mathrm{e}^{-\ln(t)}(\mathrm{A}\cos(\sqrt{3}\ln(t))+\mathrm{B}\sin(\sqrt{3}\ln(t)))+\frac{7\ln(t)-4}{49}\mathrm{e}^{\ln(t)}\\
\iff &\exists(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2, \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad z(t)=\frac{1}{t}(\mathrm{A}\cos(\sqrt{3}\ln(t))+\mathrm{B}\sin(\sqrt{3}\ln(t)))+\frac{(7\ln(t)-4)t}{49}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (F) est :

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathrm{F}}=\left\{\begin{array}{ccl}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{t}\left(\mathrm{A}\cos(\sqrt{3}\ln(t))+\mathrm{B}\sin(\sqrt{3}\ln(t))\right)+\dfrac{(7\ln(t)-4)t}{49}\end{array}\ \middle|\ (\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Exercice 3 :

Partie A : Calcul explicite de I_n.

1. $$\boxed{\mathrm{I}_0=\int_0^1 1\,\mathrm{d}t=1}$$

et $\mathrm{I}_1=\displaystyle\int_0^1 t(1-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t-\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, donc $\boxed{\mathrm{I}_1=\dfrac{1}{6}.}$

2. (a) Posons : $u(t)=t-t^2$.
Alors,

$$\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-t^2\right)^n\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 u'(t)u(t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}u(t)^{n+1}\right]_0^1=0.$$

(b) Comme $\left(t-t^2\right)^n=t^n(1-t)^n$, par linéarité, on a :

$$0=\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{I}_n.}$

3. Soit $\mathrm{I}_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$.

Posons : $u(t)=\dfrac{t^{n+2}}{n+2}$ et $v(t)=(1-t)^{n+1}$. Alors u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et

$$\forall t\in[0;1],\ u'(t)=t^{n+1}\qquad\text{et}\qquad v'(t)=-(n+1)(1-t)^n.$$

Par intégrations par parties, on a :

$$\mathrm{I}_{n+1}=\cancel{\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\times(1-t)^{n+1}\right]_0^1}+\int_0^1\frac{t^{n+2}}{n+2}\times(n+1)(1-t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{n+1}{n+2}\times\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{I}_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}\displaystyle\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n\,\mathrm{d}t.}$

4 Comme $(1-t)^{n+1} = (1-t)^n(1-t)$, par linéarité, on déduit facilement :

$$\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n(1-t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^n\,\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{2}\mathrm{I}_n \text{ d'après } 2.b} - \underbrace{\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^n\,\mathrm{d}t}_{=\frac{n+2}{n+1}\mathrm{I}_{n+1} \text{ d'après } 3}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{I}_n - \frac{n+2}{n+1}\mathrm{I}_{n+1} = \frac{n+1}{2(2n+3)}\mathrm{I}_n.$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_{n+1} = \frac{n+1}{2(2n+3)}\mathrm{I}_n.}$

Alors : $\boxed{\mathrm{I}_2 = \frac{2}{10}\mathrm{I}_1 = \frac{1}{30},}$ $\boxed{\mathrm{I}_3 = \frac{3}{14} \times \frac{1}{30} = \frac{1}{140}}$ et $\boxed{\mathrm{I}_4 = \frac{4}{2 \times 9}\frac{1}{140} = \frac{1}{630}.}$

5 Pour tout entier naturel n, posons $\mathcal{P}(n)$: « $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$ ».

— *Initialisation* : Pour $n = 0$, $\dfrac{1}{(2\times 0+1)\binom{2\times 0}{0}} = 1 = \mathrm{I}_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— *Hérédité* : Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie *i.e.* $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

D'après 4, $\mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(2n+3)}\mathrm{I}_n$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n+1} &= \frac{n+1}{2(2n+3)}\frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \\ &= \frac{1}{2(2n+3)}\frac{1}{\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}}\end{aligned}$$

Or, $\binom{2n+2}{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\times\dfrac{(2n)!}{n!n!} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$.

$$\text{D'où, } \mathrm{I}_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)\binom{2n+2}{n+1}}$$

La propriété est donc héréditaire.

— *Conclusion* : Initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, la propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}}$$

Partie B : Applications

6 Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n \,\mathrm{d}t$$

Or, $(1-t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^k$.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 t^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^k \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^{n+k} \,\mathrm{d}t, \quad \text{par linéarité de la somme.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{n+k} \,\mathrm{d}t, \quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left[\frac{1}{n+k+1}\, t^{n+k+1}\right]_0^1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{n+k+1}.
\end{aligned}$$

D'après 5, $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1} = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.}$$

7 a Par linéarité de l'intégrale : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{I}_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} t^k(1-t)^k\right) \mathrm{d}t$.

Comme $t(1-t) \neq 1$, pour tout $t \in [0\,;1]$, en reconnaissant une progression géométrique, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} t^k(1-t)^k = \sum_{k=0}^{n} \big(t(1-t)\big)^k = \frac{1-\big(t(1-t)\big)^{n+1}}{1-t(1-t)}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{I}_k = \int_0^1 \frac{1}{1-t(1-t)} \,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(t(1-t))^{n+1}}{1-t(1-t)} \,\mathrm{d}t.$$

Donc, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathrm{I}_k = \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\big(t(1-t)\big)^{n+1}}{t^2-t+1} \,\mathrm{d}t.}$

(b) On reconnait une intégrale classique où l'on commence par metrre le dénominateur sou forme canonique :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$
$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}.$$

Donc, $\boxed{\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.}$

(c) Le trinôme $t(1-t)$ a un maximum en $\frac{1}{2}$, pour lequel il prend la valeur $\frac{1}{4}$.

Ainsi, $\forall t \in [0;1], \quad t(1-t) \leqslant \frac{1}{4}$.
De plus, $\forall t \in [0;1], t(1-t) \geqslant 0$.

En composant les inégalités positives $0 \leqslant t(1-t) \leqslant \frac{1}{4}$ par la fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^n$, on obtient finalement :

$$\boxed{\forall t \in [0\,;1]\,, 0 \leqslant \big(t(1-t)\big)^n \leqslant \frac{1}{4^n}.}$$

Comme $t^2-t+1 = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4} > 0$, on obtient :

$$\forall t \in [0\,;1]\,,\ 0 \leqslant \frac{\big(t(1-t)\big)^{n+1}}{t^2-t+1} \leqslant \frac{1}{4^{n+1}}\frac{1}{t^2-t+1}.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \mathrm{R}_n \leqslant \frac{1}{4^{n+1}}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4^{n+1}}\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \mathrm{R}_n \leqslant \frac{2\sqrt{3}\pi}{9\times 4^{n+1}}.}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{3}\pi}{9\times 4^{n+1}} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, on déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = 0.}$$

(d) Il suffit de regrouper tous les résultats précédents avec $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)\binom{2k}{k}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} + \mathrm{R}_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n = 0$.

Conclusion,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)\binom{2k}{k}}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.}$$

Partie C : Et J_n dans tout ça ?

8 $\mathrm{J}_0=\displaystyle\int_0^{\pi/2}1\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$,

$\mathrm{J}_1=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(t)\,\mathrm{d}t=[-\cos(t)]_0^{\pi/2}=1$,

$\mathrm{J}_2=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\cos(2t))}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2}1\,\mathrm{d}t-\int_0^{\pi/2}\cos(2t)\,\mathrm{d}t\right)=\frac{\pi}{4}-\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$.

En résumé, $\boxed{\mathrm{J}_0=\frac{\pi}{2},\ \mathrm{J}_1=1,\ \mathrm{J}_2=\frac{\pi}{4}.}$

9 On effectue le changement de variable : $t=\pi-u \iff u=t-\pi$. On a alors $\mathrm{d}u=-\,\mathrm{d}t$ et la formule de changement de variable donne alors :

$$\mathrm{J}_n=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\pi-u)^n(-\mathrm{d}u)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(\pi-u)^n\mathrm{d}u=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(u)^n\mathrm{d}u$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{J}_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(u)^n n\mathrm{d}u.}$

10 Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons : $t=\cos^2(u)$, alors $dt=-2\sin(u)\cos(u)du$. Pour $t_0=0$, $u_0=\frac{\pi}{2}$ et pour $t_1=\frac{\pi}{2}$, $u_1=0$.
Ainsi,

$$\mathrm{I}_n=\int_{\pi/2}^{0}\left(\cos^2(u)\right)^n\left(1-\cos^2(u)\right)^n(-2\cos(u)\sin(u))\mathrm{d}u=\int_0^{\pi/2}\cos(u)^{2n}\sin(u)^{2n}\sin(2u)\mathrm{d}u$$

Or, $\cos(u)^{2n}\sin(u)^{2n}=(\cos(u)\sin(u))^{2n}=\left(\frac{1}{2}\sin(2u)\right)^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}\sin(2u)^{2n}=\frac{1}{4^n}\sin(2u)^{2n}$.

Conclusion, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\mathrm{I}_n=\frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2u)^{2n+1}\mathrm{d}u.}$

11 Partons de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2u)^{2n+1}\mathrm{d}u$ et posons $v=2u \iff u=\frac{v}{2}$.
Alors $2\mathrm{d}u=\mathrm{d}v$ et,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2u)^{2n+1}\mathrm{d}u=\int_0^{\pi}\sin(v)^{2n+1}\frac{1}{2}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(v)^{2n+1}\mathrm{d}v.$$

On en déduit $\mathrm{I}_n=\displaystyle\frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2u)^{2n+1}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^n}\int_0^{\pi}\sin(v)^{2n+1}\mathrm{d}v$.

Or, d'après la relation de Chasles, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin(v)^{2n+1}\mathrm{d}v &= \int_0^{\pi/2} \sin(v)^{2n+1}\mathrm{d}v + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(v)^{2n+1}\mathrm{d}v \\ &= \mathrm{J}_{2n+1} + \mathrm{J}_{2n+1}, \quad \text{par définition et d'après } \boxed{9}. \\ &= 2\mathrm{J}_{2n+1}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{I}_n = \frac{1}{4^n}\mathrm{J}_{2n+1}.}$$