Nombres réels

Exercice 1 : Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble

$$\mathrm{L} = \left\{|y-x|, (x,y) \in \mathrm{A}^2\right\}.$$

Montrer que L admet une borne supérieure et que $\sup \mathrm{L} = \sup(\mathrm{A}) - \inf(\mathrm{A})$.

Exercice 2 : Pour tout réel x, on pose $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, et on considère l'ensemble

$$\mathrm{F}_x = \{f(nx), n \in \mathbb{N}^\star\}$$

1. a) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leqslant f(x) < 1$.
   b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $f(x+k) = f(x)$.
   c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout p entier, on a $f(px) = f(pf(x))$.
2. a) Montrer qu'un réel x est rationnel si et seulement s'il existe un entier q non nul tel que $f(qx) = 0$.
   b) Soit x un rationnel. Il existe des entiers p et q, avec $q > 0$ tels que $x = \dfrac{p}{q}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et r le reste dans le division euclidienne de n par q. Montrer qu'on a $f(nx) = f(rx)$.
   En déduire que l'ensemble F_x est fini.
3. Dans la suite du problème, on considère x un réel qui n'est pas rationnel.
   a) Montrer que F_x admet une borne inférieure, qu'on notera α.
   b) On suppose que $\alpha > 0$. Justifier que $\{k \in \mathbb{N}, k\alpha \geqslant 1\}$ admet un plus petit élément.
   En notant p ce plus petit élément, vérifier qu'on a $\alpha < \dfrac{\alpha+1}{p}$.
   c) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\alpha \leqslant f(nx) < \dfrac{\alpha+1}{p}$.
   d) En déduire que $\lfloor pf(nx) \rfloor \geqslant 1$ et que $f(pf(nx)) < \alpha$.
   Mettre en évidence une contradiction, et conclure.
4. a) Justifier que, pour tout réel $\lambda > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $0 < f(nx) < \lambda$.
   b) Montrer que tout intervalle $]a, b[$, avec $0 < a < b < 1$, contient un élément de F_x. Que peut-on en conclure ?