Nombres réels

Exercice 1 :

— A est non vide. Considérons donc $a \in A$. En prenant $x = y = a$, on a donc $0 \in L$ *i.e.* L est <u>non vide</u>.
A étant bornée, considérons $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, |x| \leqslant M$.
On a alors $\forall (x, y) \in A^2, |y - x| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2M$ *i.e.* L est <u>majoré</u> par 2M.
L admet donc une borne supérieure $\sup(L)$.

— Montrons que $\sup(L) = \sup(A) - \inf(A)$ par double inégalité :

($\leqslant$) : Soient x et y dans A. On a $x - y \leqslant \sup(A) - \inf(A)$, et de la même manière, $y - x \leqslant \sup(A) - \inf(A)$.
On en conclut que $|x-y| \leqslant \sup(A) - \inf(A)$, et donc $\sup(L) \leqslant \sup(A) - \inf(A)$.

($\geqslant$) : Montrons désormais que $\sup(L) \geqslant \sup(A) - \inf(A)$
On va chercher à prouver que $\sup(A) \leqslant \sup(L) + \inf(A)$
Il suffit de prouver que $\sup(L) + \inf(A)$ est un majorant de A. Soit donc $x \in A$.
Montrer que $x \leqslant \sup(L) + \inf(A)$ revient à prouver que $x - \sup(L) \leqslant \inf(A)$, i.e. $x - \sup(L)$ est un minorant de A.
Considérons maintenant $y \in A$, et montrons que $x - \sup(L) \leqslant y$, i.e. $x - y \leqslant \sup(L)$.
Mais cette dernière inégalité est vérifiée puisque $\sup(L)$ est un majorant de L.
La démonstration peut se rédiger ainsi :
Soit $x \in A$.
Pour tout $y \in A$, on a $x - y \leqslant |x - y| \leqslant \sup(L)$.
Par conséquent $-\sup(L) \leqslant y - x$ et encore $x - \sup(L) \leqslant y$.
Comme c'est valable pour tout $y \in A$, on en déduit que $x - \sup(L) \leqslant \inf(A)$, ou encore que $x \leqslant \inf(A) + \sup(L)$.
Comme c'est valable pour tout $x \in A$, $\inf(A) + \sup(L)$ est un majorant de A.
On a alors $\sup(A) \leqslant \sup(L) + \inf(A)$, soit $\sup(L) \geqslant \sup(A) - \inf(A)$.

Finalement, $\boxed{\sup(L) = \sup(A) - \inf(A).}$

Exercice 2 :

1 (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de la partie entière, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Donc $0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1$ *i.e.* $0 \leqslant f(x) < 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant f(x) < 1}$$

(b) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

— $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ donc $\lfloor x \rfloor + k \leqslant x + k$.
$\lfloor x \rfloor + k$ étant un entier inférieur à $x + k$, et $\lfloor x + k \rfloor$ le plus grand d'entre eux, on a

$$\lfloor x \rfloor + k \leqslant \lfloor x + k \rfloor$$

— $\lfloor x+k \rfloor \leqslant x+k$ donc $\lfloor x+k \rfloor - k \leqslant x$.
$\lfloor x+k \rfloor - k$ étant un entier inférieur à x, et $\lfloor x \rfloor$ le plus grand d'entre eux, on a $\lfloor x+k \rfloor - k \leqslant \lfloor x \rfloor$.
$$\lfloor x+k \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + k$$

On en déduit que $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.
Ainsi, $f(x+k) = (x+k) - \lfloor x+k \rfloor = (x+k) - (\lfloor x \rfloor + k) = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x+k) = f(x)}$$

Remarque : En particulier que $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(k) = f(0) = 0$.

c) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$.
On a $x = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor) = \lfloor x \rfloor + f(x)$.
D'où $px = p\lfloor x \rfloor + pf(x)$.
Or $p\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $f(px) = f(\underbrace{p\lfloor x \rfloor}_{\in\mathbb{Z}} + pf(x)) = f(pf(x))$ d'après la propriété précédente appliquée avec $k = p\lfloor x \rfloor$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{Z}, \quad f(px) = f(pf(x))}$$

2 a) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left[x \in \mathbb{Q} \iff (\exists q \in \mathbb{Z}^\star, f(qx) = 0)\right]$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\Longrightarrow$: Supposons que $x \in \mathbb{Q}$. On peut alors écrire $x = \dfrac{p}{q}$ avec $q \in \mathbb{Z}^\star$.
On a alors $qx \in \mathbb{Z}$ et donc $f(qx) = 0$.
$\Longleftarrow$: Supposons qu'il existe un entier $q \in \mathbb{Z}^\star$ tel que $f(qx) = 0$.
On en déduit que $qx - \lfloor qx \rfloor = 0$, ou encore $qx = \lfloor qx \rfloor$.
Posons $p = \lfloor qx \rfloor \in \mathbb{Z}$.
On a alors $qx = p$ d'où $x = \dfrac{p}{q}$ (car $q \neq 0$).
Les nombres p et q étant des entiers, on a bien $x \in \mathbb{Q}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left[x \in \mathbb{Q} \iff (\exists q \in \mathbb{Z}^\star, f(qx) = 0)\right]}$$

b) Soit x un rationnel. Il existe des entiers p et q, avec $q > 0$ tels que $x = \dfrac{p}{q}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et r le reste dans le division euclidienne de n par q.
On a donc $n = qa + r$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$.
Alors $f(nx) = f\big((qa+r)x\big) = f\big(qax+rx\big) = f\left(qa\dfrac{p}{q} + rx\right) = f(ap+rx) = f(rx)$ car $ap \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble F_x est l'ensemble des $f(nx)$ pour n décrivant $\mathbb{N}^\star$. Mais on vient de démontrer que les $f(nx)$ sont dans l'ensemble $\Big\{f(rx), r \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}\Big\}$ d'où

$$\boxed{F_x \subset \Big\{f(rx), r \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}\Big\}}$$

L'ensemble F_x est donc fini. Il compte au maximum q valeurs.

3. Dans la suite du problème, on considère x un réel qui n'est pas rationnel.

(a) F_x est **non vide**. Il contient par exemple $f(1x) = x - \lfloor x \rfloor$.
Par ailleurs, F_x est **minoré** (par 0). En effet, on a vu que $\forall X \in \mathbb{R}, \quad f(X) \geqslant 0$.
On en déduit que $\boxed{F_x \text{ admet une borne inférieure.}}$

(b) On pose $\alpha = \inf(F_x)$.
On suppose que $\alpha > 0$.
$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k\alpha \geqslant 1 \iff k \geqslant \dfrac{1}{\alpha}$.
Par exemple, l'entier $\left\lfloor \dfrac{1}{\alpha} \right\rfloor + 1$ est dans $\{k \in \mathbb{N}, k\alpha \geqslant 1\}$. On en déduit que cet ensemble est **non vide**.
Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément donc $\{k \in \mathbb{N}, k\alpha \geqslant 1\}$ admet un plus petit élément.
Posons $p = \min(\{k \in \mathbb{N}, k\alpha \geqslant 1\})$. On peut vérifier que $p \neq 0$ puisque $0\alpha < 1$.
On a donc $\begin{cases} p \in \{k \in \mathbb{N}, k\alpha \geqslant 1\} \\ p-1 \notin \{k \in \mathbb{N}, k\alpha \geqslant 1\} \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} p\alpha \geqslant 1 \\ (p-1)\alpha < 1 \end{cases}$.
La deuxième inégalité donne $p\alpha < 1 + \alpha$ et comme $p > 0$, on en déduit $\boxed{\alpha < \dfrac{\alpha+1}{p}}$.

(c) Comme $\alpha = \inf(F_x)$, α est le plus grand des minorants de F_x.
On vient de voir que $\dfrac{\alpha+1}{p} > \alpha$, donc $\dfrac{\alpha+1}{p}$ n'est plus un minorant de F_x.
Par conséquent, il existe un élément de F_x (disons $f(nx)$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$) tel que $f(nx) < \dfrac{\alpha+1}{p}$.
Par ailleurs, α est un minorant de F_x, donc on a $\alpha \leqslant f(nx)$.

$$\boxed{\text{Il existe bien un entier } n \in \mathbb{N}^\star \text{ tel que } \alpha \leqslant f(nx) < \frac{\alpha+1}{p}.}$$

(d) En multipliant par $p > 0$, on a $p\alpha \leqslant pf(nx) < \alpha + 1 \quad (1)$.
Or, on a vu à la question 3.(b) que $p\alpha \geqslant 1$.
D'où, $1 \leqslant p\alpha \leqslant pf(nx)$.
1 est un entier inférieur à $pf(nx)$ et $\lfloor pf(nx) \rfloor$ est le plus grand d'entre eux. D'où

$$\boxed{1 \leqslant \lfloor pf(nx) \rfloor}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(pf(nx)) &= pf(nx) - \lfloor pf(nx) \rfloor \text{ par définition de } f \\ &\leqslant pf(nx) - 1 \text{ puisque } 1 \leqslant \lfloor pf(nx) \rfloor \\ &< (\alpha + 1) - 1 \text{ d'après } (1) \end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{f(pf(nx)) < \alpha}$$

Or, d'après la question 1.c on a $f(pf(nx)) = f(pnx)$, d'où $f(pnx) < \alpha$.
C'est absurde, puisque α est un minorant de F_x et que $f(pnx) \in \mathrm{F}_x$.
On en déduit que l'hypothèse faite au 3.b (à savoir $\alpha > 0$) est fausse.
On a donc $\alpha \leqslant 0$.
Par ailleurs, on a déjà dit que F_x était minoré par 0. Donc $0 \leqslant \alpha$.
On peut donc conclure que $\alpha = 0$.

$$\boxed{\inf(\mathrm{F}_x) = 0.}$$

4 a Soit $\lambda > 0$. Comme λ est strictement supérieur à $\inf(\mathrm{F}_x)$, λ n'est pas un minorant de F_x.
Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f(nx) < \lambda$.
On a aussi $\inf(\mathrm{F}_x) = 0 \leqslant f(nx)$. Et si on avait $0 = f(nx)$, on aurait x rationnel : c'est absurde.
D'où, $0 < f(nx)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \lambda > 0, \text{ il existe } n \in \mathbb{N}^\star \text{ tel que } 0 < f(nx) < \lambda.}$$

b On considère un intervalle $]a, b[$, avec $0 < a < b < 1$. Posons $\lambda = b - a > 0$.
D'après la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $0 < f(nx) < \lambda$.
On note $p = \left\lfloor \dfrac{b}{f(nx)} \right\rfloor$.
On a $\dfrac{b}{f(nx)} - 1 < p \leqslant \dfrac{b}{f(nx)}$.
En multipliant par $f(nx) > 0$, on obtient : $b - f(nx) < pf(nx) \leqslant b$.
Or $f(nx) < b - a$ donc $a < b - f(nx)$.
On en déduit finalement,

$$a < pf(nx) \leqslant b. \tag{X.1}$$

Comme $0 < a < b < 1$, on a $0 < pf(nx) < 1$.
Par conséquent, $\lfloor pf(nx) \rfloor = 0$ et donc $f(pf(nx)) = pf(nx) - \lfloor pf(nx) \rfloor = pf(nx)$.
Et d'après la question 1.c., on a $f(pf(nx)) = f(pnx)$, donc

$$f(pnx) = pf(nx). \tag{X.2}$$

D'après (X.1) et (X.1), on conclut que $a < f(pnx) \leqslant b$.
Comme $f(pnx) \in \mathrm{F}_x$, on peut conclure :

$$\boxed{]a, b[\text{ contient un élément de } \mathrm{F}_x.}$$

Autrement dit, $\mathbf{F}_x$ **est dense dans** $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.