Puissances de Matrices

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :

$$\mathrm{J}_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer J^p.
2. En déduire A^p.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux suites réelles (α_n) et (β_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \mathrm{A}^n = \alpha_n \mathrm{A} + \beta_n \mathrm{A}^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_1 =, 1 & \alpha_{n+1} = 2\beta_n \\ \beta_1 = 0, & \beta_{n+1} = \beta_n + \alpha_n. \end{cases}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que $\alpha_n = \dfrac{2(-1)^{n-1} + 2^{n-1}}{3}$ et $\beta_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3}$.
3. En déduire A^3 et A^4.

Exercice 3 : On considère $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^{-1} puis PAP^{-1}.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner l'expression de A^3 et A^4.